

# DISPENSE

per le classi II



## Indice generale

IL MOTO.....	2	ESEMPI LEGGI DINAMICA.....	23
LA LEGGE ORARIA DEL MOTO.....	2	TERZA LEGGE DELLA DINAMICA.....	26
VELOCITÀ.....	3	ESEMPIO DINAMICA.....	26
VELOCITÀ MEDIA E VELOCITÀ ISTANTANEA.....	4	ESERCIZI DA RISOLVERE DINAMICA.....	27
MOTO RETTILINEO ED UNIFORME.....	5	MOTO ARMONICO.....	28
ESERCIZI GUIDATI MOTO RETTILINEO.....	6	SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI.....	30
ESERCIZI DA RISOLVERE MOTO RETTILINEO.....	7	LAVORO ED ENERGIA.....	31
MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.....	7	POTENZA.....	33
ESERCIZI GUIDATI MOTO ACCELERATO.....	9	TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA.....	33
ESERCIZI DA RISOLVERE.....	10	ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE.....	36
MOTO PARABOLICO.....	11	ENERGIA POTENZIALE ELASTICA.....	38
MOTO CIRCOLARE UNIFORME.....	15	CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.....	39
LE LEGGI DELLA DINAMICA.....	19	STUDIO DEGLI URTI.....	40
SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA.....	20	URTO ELASTICO CENTRALE.....	40
PRIMA LEGGE DELLA DINAMICA.....	21	URTO ANELASTICO CENTRALE.....	41
IL PESO DEI CORPI.....	21	URTI NON CENTRALI.....	41
TEOREMA DELL'IMPULSO.....	22	ESEMPI LEGGI DINAMICA.....	23

## IL MOTO

Dopo esserci occupati della *statica*, che studia le condizioni di equilibrio degli oggetti (corpi), ci occupiamo ora di *cinematica*, cioè della **descrizione del movimento dei corpi**, senza indagare sulle cause che lo producono. Più avanti, ci occuperemo della *dinamica*, cioè delle relazioni che esistono fra il moto dei corpi e le forze, cioè le **cause che lo producono**.

All'inizio, per semplificare le cose, studieremo il *moto del punto materiale*, cioè ci riferiremo sempre ad oggetti così piccoli da poter essere considerati come *punti geometrici*, rispetto allo spazio in cui avviene il loro movimento.

Chiameremo *traiettoria* di un oggetto in movimento *la linea che unisce tutte le posizioni attraverso le quali passa l'oggetto*.

I concetti di *quiete* e *moto* sono relativi e quindi vanno riferiti ad un *sistema di riferimento*. Un sistema di riferimento può essere l'insieme di tutti gli oggetti rispetto ai quali il movimento del corpo avviene con le stesse caratteristiche (ad esempio l'aula, con i suoi banchi, la cattedra e le pareti, può essere il sistema di riferimento per noi che ci muoviamo al suo interno o al suo esterno).

Un sistema di riferimento viene normalmente schematizzato con una *terna di assi cartesiani*, costituita da tre rette orientate ( $xyz$ ), ciascuna delle quali è ortogonale alle altre due. Tali rette hanno un punto comune (O) detto *origine*.

La posizione di un punto P rispetto ad una terna di assi cartesiani è nota se si conoscono le sue 3 coordinate  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  che sono rispettivamente le proiezioni della distanza  $\overline{OP}$  sulle 3 rette  $xyz$ .

Studiare il moto del punto significa studiare il movimento dei 3 punti  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  sui 3 assi cartesiani.

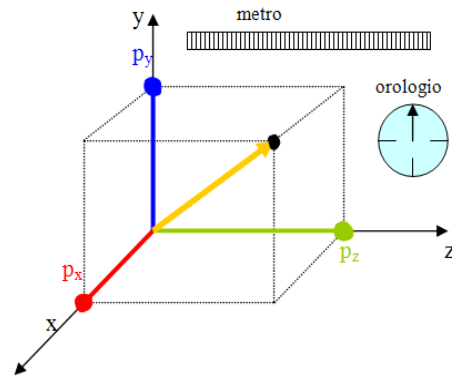
Un oggetto si muove, quando cambia la sua posizione con il passare del tempo, quindi per descrivere il moto bisogna eseguire misure di *lunghezza* e di *tempo*.

Un sistema di riferimento è quindi costituito da una *terna di assi cartesiani*, un *metro* e un *orologio*.

Si possono così studiare:

- **MOTI RETTILINEI** su una sola dimensione (esempio x)
- **MOTI NEL PIANO** su due dimensioni (esempio xy)
- **MOTI NELLO SPAZIO** su tre dimensioni (esempio xyz).

Inizieremo, ovviamente, con il caso meno complicato, quello del moto rettilineo, poi, useremo le informazioni apprese per affrontare lo studio di moti più complicati che avvengono su piani o nello spazio tridimensionale.

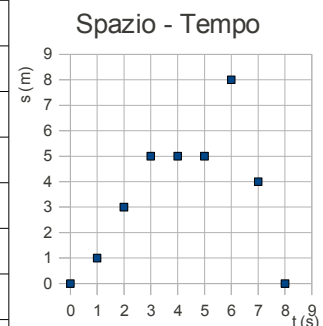


## LA LEGGE ORARIA DEL MOTO

Studiare il moto di un corpo significa conoscere, in ogni istante di tempo, la sua posizione rispetto ad un determinato sistema di riferimento. Esempi possono essere l'orario dei treni, che permette di conoscere, a determinati orari, la stazione ove si trova un determinato convoglio e la tabella di marcia di una tappa di una gara ciclistica, nella quale compaiono i possibili orari di passaggio dei corridori nelle varie località.

Per fare un esempio ulteriore, consideriamo un corpo qualsiasi che si muove su un tratto di strada rettilineo, con tempi e spazi rappresentati dalla tabella e dal relativo grafico, che riporta le varie distanze del corpo dall'origine.

Tempo (s)	Spazio (m)
0	0
1	1
2	3
3	5
4	5
5	5
6	8
7	4
8	0



Possiamo osservare che:

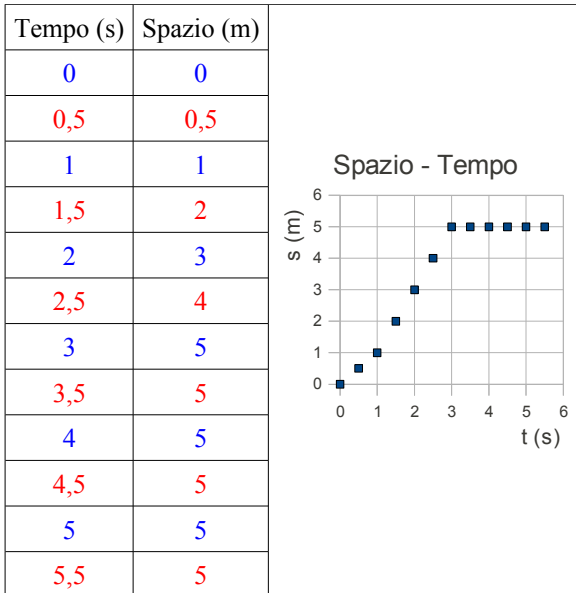
- all'istante iniziale ( $t=0s$ ) il corpo si trova nell'origine ( $s=0$ )
- all'istante ( $t=1s$ ) la distanza del corpo dall'origine è di 1m
- all'istante ( $t=2s$ ) la distanza del corpo è di 3m
- all'istante ( $t=3s$ ) la distanza del corpo è di 5m
- all'istante ( $t=4s$ ) la distanza del corpo è di 5m
- all'istante ( $t=5s$ ) la distanza del corpo è di 5m
- all'istante ( $t=6s$ ) la distanza del corpo è di 8m
- all'istante ( $t=7s$ ) la distanza del corpo è di 4m
- all'istante ( $t=8s$ ) il corpo si ritrova nell'origine.

# Fisica II

Ci facciamo una domanda:

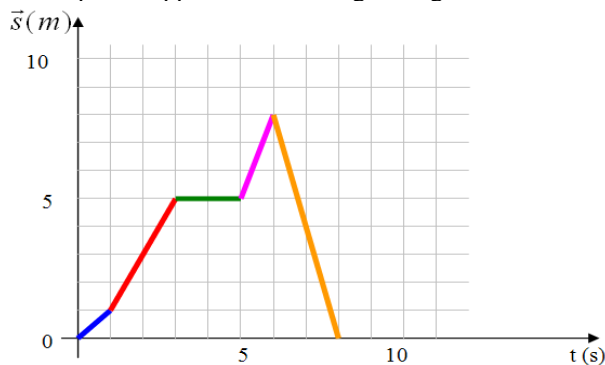
*Osservando la tabella e il grafico, possiamo dire con precisione dove si trova il corpo all'istante  $t=2,5s$ ? Oppure quando  $t=6,5s$ ?*

**Evidentemente no!** Per avere maggiori informazioni dovremmo avere una tabella e un grafico come i seguenti:



Ma, anche in questo caso, ci troveremmo in difficoltà se ci chiedessero la posizione del corpo quando  $t=4,25s$  o quando  $t=5,335s$ .

Per conoscere le posizioni, ad ogni istante, dovremmo avere a disposizione una tabella infinitamente lunga, completa di decimi, centesimi, millesimi di secondo, ... come quella rappresentata dal seguente grafico:



A questo punto potremmo affermare di conoscere perfettamente il moto del corpo, infatti, le linee sono costituite da infiniti punti.

Durante i primi corsi di fisica vengono studiati il moto rettilineo ed uniforme ed il moto uniformemente accelerato, o combinazioni di essi; per questi tipi di moto il grafico (*spazio, tempo*) è sempre rappresentato da linee continue.

Osservando l'ultimo grafico della pagina precedente, ci rendiamo conto che nell'intervallo di tempo che intercorre fra il **secondo 1** ( $t=1s$ ) ed il **secondo 3** ( $t=3s$ ) il corpo si sposta più rapidamente in

avanti di quanto non faccia nel primo secondo, (quello compreso fra  $t=0s$  e  $t=1s$ ).

Osserviamo anche che fra  $t=3s$  e  $t=5s$  non cambia la posizione del corpo, pertanto ne deduciamo che esso resta fermo.

Fra  $t=5s$  e  $t=6s$  c'è uno spostamento in avanti ancora più marcato e poi, fra  $t=6s$  e  $t=8s$  ci si rende conto che il corpo torna indietro molto rapidamente fino al punto da dove era partito ( $s=0$ ).

## VELOCITÀ

Si definisce **velocità**  $\vec{v}$  del corpo, il rapporto fra lo spazio percorso ed il tempo impiegato dal corpo stesso per eseguire tale spostamento, si scrive:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad \text{MOTO, 1}$$

cioè:

$$\vec{v} = \frac{\text{posizione finale}(\vec{s}_f) - \text{posizione iniziale}(\vec{s}_i)}{\text{istante finale}(t_f) - \text{istante iniziale}(t_i)}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\vec{v}_1 = \frac{1 \text{ m} - 0 \text{ m}}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{2,3} = \frac{5 \text{ m} - 1 \text{ m}}{3 \text{ s} - 1 \text{ s}} = \frac{4 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{4,5} = \frac{5 \text{ m} - 5 \text{ m}}{5 \text{ s} - 3 \text{ s}} = \frac{0 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

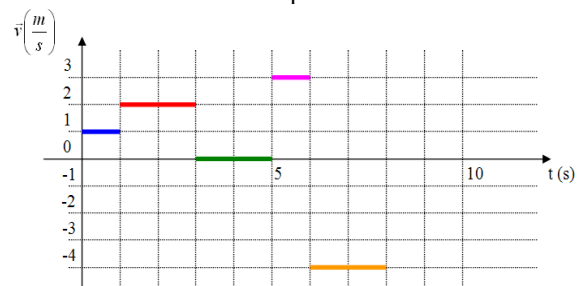
$$\vec{v}_6 = \frac{8 \text{ m} - 5 \text{ m}}{6 \text{ s} - 5 \text{ s}} = \frac{3 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{7,8} = \frac{0 \text{ m} - 8 \text{ m}}{8 \text{ s} - 6 \text{ s}} = \frac{-8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Osserviamo che nei tratti di grafico in salita la velocità è positiva ed il suo valore aumenta con la pendenza del segmento.

Nei tratti piani la velocità è nulla e che in quelli in discesa la velocità ha valore negativo e questo rappresenta un ritorno del corpo, un verso negativo, rispetto all'altro, che consideriamo positivo.

Ecco un grafico che rappresenta questi valori di velocità in funzione del tempo:



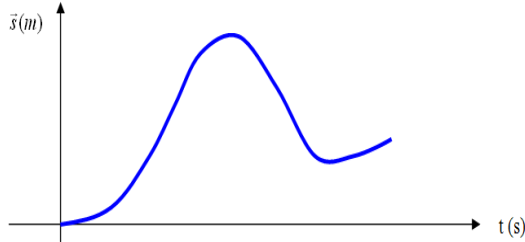
## Approfondimenti

Nei punti in cui il grafico cambia pendenza c'è un cambiamento della velocità in un intervallo di tempo nullo (ad esempio, al secondo 5 c'è un istantaneo cambiamento della velocità dal valore  $0 \frac{m}{s}$  al valore

$3 \frac{m}{s}$ ), ci rendiamo conto che, in realtà, ciò non può avvenire.

Ci vorrà sempre un intervallo di tempo non nullo per far avvenire una qualsiasi variazione di velocità.

Osserviamo il seguente grafico  $(\vec{s}, t)$  :



Ora, è molto più difficile di prima individuare le varie velocità assunte dal corpo nei vari istanti, non ci sono cambi repentini, bensì gradualità di pendenza della curva che esprime l'andamento della posizione  $s$  in funzione del tempo  $t$ .

Dobbiamo, in questo caso ricorrere ai concetti di:

### VELOCITÀ MEDIA E VELOCITÀ ISTANTANEA

Dopo un Gran Premio di F1 sentiamo dire dal telecronista che un dato pilota ha percorso il giro record della pista alla media di  $216,345 \frac{km}{h}$ , oppure, alla fine di una gara ciclistica conclusa in volata, ci informano che i corridori hanno corso alla media di  $42,328 \frac{km}{h}$ .

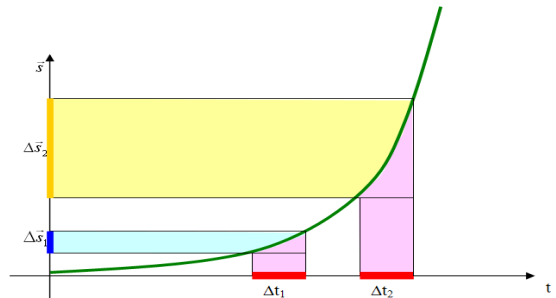
Cosa significano questi numeri? Significano forse che il pilota o i corridori si sono sempre mossi con la stessa velocità durante la corsa? Evidentemente no! Ci saranno state delle situazioni: rettilinei, discese, curve e salite che hanno indotto gli atleti ad assumere diverse velocità.

La velocità media  $\langle \vec{v} \rangle$  viene calcolata dividendo la distanza percorsa per il tempo impiegato, cioè:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad \text{MOTO, 2}$$

*Nell'esempio della F1 poteva, ad esempio, trattarsi di una pista lunga 5,3 km percorsa in un tempo di 0,0245 ore, cioè 1 minuto, 28 secondi e 2 decimi; mentre nell'esempio ciclistico, poteva trattarsi di una gara di 224 km percorsa 5,285 ore, cioè 5 ore, 17 minuti e 30 secondi.*

La velocità media può essere calcolata anche su un tratto particolare di percorso: ad esempio su un impegnativo tratto di salita o, come fanno nelle gare di chilometro lanciato con gli sci, su un breve tratto di pista alla fine di una lunga discesa che serve come rincorsa.



Ora, osserviamo il seguente grafico che rappresenta ancora le varie posizioni  $s$  nei vari istanti di tempo  $t$  e vediamo come da esso, si possano ricavare velocità medie diverse, misurate su intervalli di tempo identici ( $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ) ma non simultanei, cioè come possano esserci valori diversi del rapporto  $\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$ .

In questo esempio avremo:

$$\frac{\Delta \vec{s}_2}{\Delta t_2} > \frac{\Delta \vec{s}_1}{\Delta t_1}$$

e quindi:

$$\langle \vec{v}_2 \rangle > \langle \vec{v}_1 \rangle$$

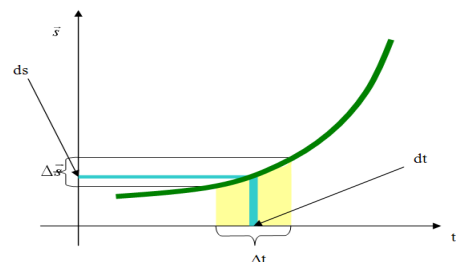
Ci sono dunque due velocità medie diverse.

E se volessimo calcolare la velocità di un corpo in un preciso istante  $t$ ?

Chiaramente dovremmo restringere l'intervallo di tempo  $\Delta t$  fino a fargli avere uno "spessore" piccolissimo, tale però che si possa ancora fare il rapporto fra il piccolissimo spazio percorso e questo tempo brevissimo. Se restringessimo fino ad annullare  $\Delta t$  non ci sarebbe nemmeno spazio percorso e si avrebbe una forma matematica indeterminata del tipo  $\frac{0}{0}$ .

Questa operazione di restringimento si chiama limite (lo si impara in quarta) e si scrive così:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v} = \frac{d \vec{s}}{dt} \quad \text{MOTO, 3}$$

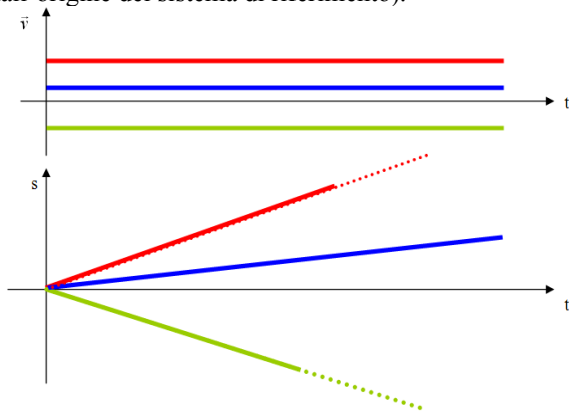


## MOTO RETTILINEO ED UNIFORME

Si parla di moto rettilineo ed uniforme quando il moto del corpo avviene lungo una sola direzione (una retta, o meglio un segmento) e **quando la velocità media è sempre uguale alla velocità istantanea**, cioè quando il corpo mantiene inalterata la sua velocità nel tempo.

Ciò è rappresentato dai seguenti grafici che mostrano 3 moti rettilinei ed uniformi di altrettanti oggetti: uno **lento**, un altro più **rapido** ed un altro con velocità di **verso opposto** (considerato negativo rispetto agli altri due).

Il primo grafico, quello superiore indica la velocità in funzione del tempo, il secondo rappresenta invece lo spazio percorso (i tre oggetti partono tutti dall'origine del sistema di riferimento).



Riscriviamo la MOTO,1:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

da cui

$$\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$$

cioè:

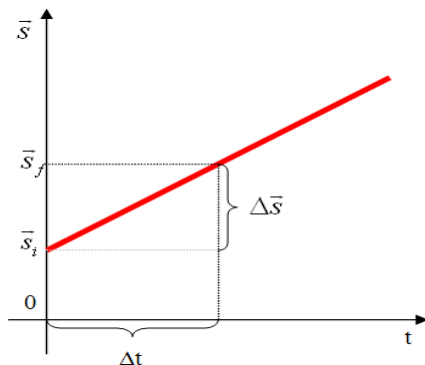
$$\vec{s}_f - \vec{s}_i = \vec{v} \cdot \Delta t$$

quindi:

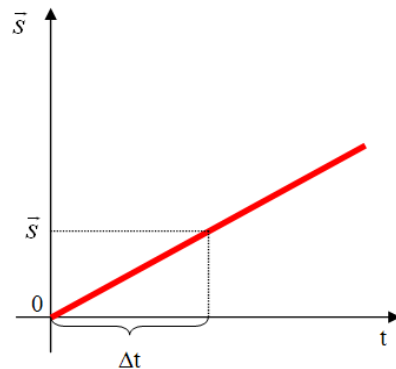
$$\boxed{\vec{s}_f = \vec{s}_i + \vec{v} \cdot \Delta t} \quad \text{MOTO, 4}$$

La MOTO,4 è l'equazione oraria dello spazio percorso nel caso del moto rettilineo ed uniforme.

Ecco la sua rappresentazione grafica:



In questo caso  $\vec{s}_i = 0$ , all'istante iniziale  $t=0$  il corpo si trova in una posizione diversa dall'origine del sistema di riferimento.



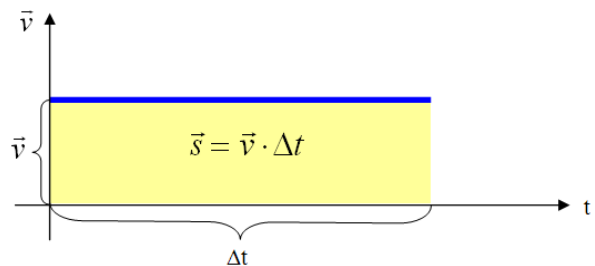
In quest'altro caso, invece, il corpo, all'istante iniziale, si trova nell'origine,  $\vec{s}_i$  può essere semplicemente chiamata  $s$ .

Quindi la legge oraria si riduce alla semplice:

$$\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$$

MOTO, 5

Osserviamo adesso anche il grafico successivo, che mostra la velocità  $\vec{v}$  che rimane costante al passare del tempo  $t$ .



Vediamo che il prodotto  $\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$  (la MOTO, 5) può essere visto come l'area di un rettangolo (quello giallo) che ha base  $\Delta t$  ed altezza  $\vec{v}$ .

Si può affermare quindi, che lo spazio percorso è dato dall'area sotto il grafico  $(\vec{v}, t)$ .

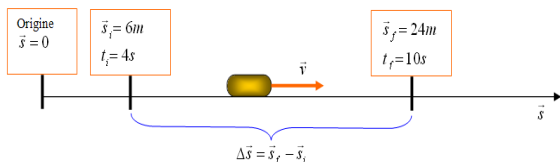
ATTENZIONE! Non è un'area convenzionale, di quelle che si misurano in  $m^2$ ! È un'area "strana" che si misura in metri. Infatti le dimensioni dei due lati sono secondi e

metri al secondo; in modo da avere:  $m = \frac{m}{s} \cdot s$ .

# Fisica II

## ESERCIZI GUIDATI MOTO RETTILINEO

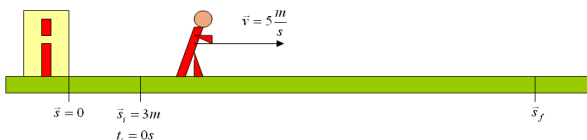
1. Un corpo procedendo con velocità costante percorre il tratto di strada rettilinea che separa due segnali: uno che indica **6 metri** e l'altro **24 metri** di distanza dall'origine. Quando passa in corrispondenza del primo segnale, il cronometro segna **4 secondi**, mentre in corrispondenza del secondo segnale il cronometro segna **10 secondi**. Calcolare la velocità del corpo.



Applichiamo la MOTO,1:

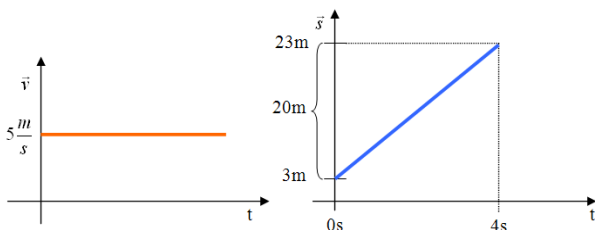
$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_f - \vec{s}_i}{t_f - t_i} = \frac{24\text{m} - 6\text{m}}{10\text{s} - 4\text{s}} = \frac{18\text{m}}{6\text{s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Un ragazzo, mentre si sta allontanando da casa alla velocità costante di  $5 \text{ m/s}$ , nel momento in cui il cronometro segna **0 secondi** si trova già a **3 metri** di distanza. A che distanza da casa si trova quel ragazzo quando il cronometro segna **4 secondi**?



Usiamo la MOTO,4:

$$\vec{s}_f = \vec{s}_i + \vec{v} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{s}_f = 3\text{m} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} = 3\text{m} + 20\text{m} = 23\text{m}$$



3. I punti A e B distano fra loro **50 metri**. Il punto materiale  $P_A$  si muove da A verso B alla velocità di  $6 \text{ m/s}$ , mentre il punto materiale  $P_B$  si muove da B verso A alla velocità di  $4 \text{ m/s}$ . Calcolare le distanze da A e da B del punto P di incontro dei due punti materiali e il tempo che è trascorso dalla loro partenza simultanea da A e da B e il loro incontro. Per entrambi i punti materiali il moto è rettilineo ed uniforme, pertanto vale:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad \text{da cui} \quad \Delta t = \frac{\Delta \vec{s}}{\vec{v}}$$

Ora, per entrambi, il tempo fra la partenza e l'incontro è lo stesso;  $P_A$  compie un tratto  $x$ , mentre  $P_B$  compie un tratto  $(50\text{m}-x)$ , vale quindi:

$$\frac{x}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{50\text{m}-x}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{da cui}$$

$$x = 30 \text{ m} \quad \text{che è la distanza AP.}$$

Ovviamente BP sarà di 20 m.

Inoltre,

$$\Delta t = \frac{30 \text{ m}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{20 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5 \text{ s}$$

4. Un'auto parte da un parcheggio alle ore 14.00 e procede sempre alla velocità di  $72 \text{ km/h}$  lungo una strada rettilinea. Un'altra auto parte dallo stesso parcheggio alle 14.10 e procede, inseguendo la prima, alla velocità costante di  $108 \text{ km/h}$ . Dopo quanto tempo e quanti km la seconda auto raggiunge la prima?

Operiamo le seguenti trasformazioni per essere nel S.I.:

$$\begin{aligned} 72\text{km/h} &= 20\text{m/s} \\ 108\text{km/h} &= 30\text{m/s} \\ 10\text{min} &= 600\text{s} \end{aligned}$$

Questa volta è lo spazio  $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$  ad essere lo stesso per i due oggetti in movimento, quindi:

$$\vec{v}_A \cdot \Delta t = \vec{v}_B \cdot (t - 600 \text{ s})$$

cioè:

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \Delta t = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} (t - 600 \text{ s})$$

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \Delta t = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \Delta t - 18000 \text{ m}$$

$$-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \Delta t = -18000 \text{ m}$$

da cui  $t = 1800 \text{ s}$  (cioè mezzora) dopo la partenza dell'auto A avviene l'incontro.

Lo spazio percorso sarà:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1800 \text{ s} = 36000 \text{ m} = 36 \text{ km}$$

# Fisica II

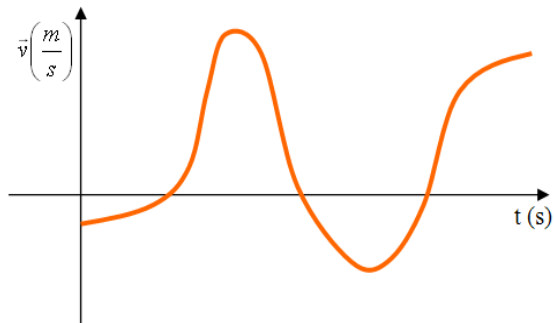
## ESERCIZI DA RISOLVERE MOTO RETTILINEO

- Calcolare la velocità costante di un punto materiale, che, nel tempo di 8 secondi, percorre 72 metri. [v=9m/s]
- Quanto tempo impiega un'auto che procede alla velocità costante di 108 km/h per percorrere un tratto di strada lungo 1500 metri? [t=50s]
- Quanto dista da casa una persona, dopo 1 minuto, se cammina allontanandosi, alla velocità di 4 m/s, dopo essere partita da un punto che già dista 25 metri dalla stessa casa, nello stesso verso? [d=265m]
- La stessa persona dell'esercizio precedente (probabilmente un super-eroe), parte sempre dallo stesso punto che dista 25 metri da casa sua e si avvicina, camminando, per 3 secondi, alla velocità di 6m/s. Quanto dista da casa ora la persona? [d=7m]
- Due auto passano davanti ad una stessa fotocellula; l'una alla velocità di 144 km/h e l'altra alla velocità di 90 km/h, nello stesso verso e stessa direzione. Quanto distano le due auto dopo 3 minuti? [d=2700m]
- Se le due auto dell'esercizio precedente passano contemporaneamente davanti alla stessa fotocellula, con le stesse velocità, ma con verso opposto, quanto distano dopo 2 minuti? [d=7800m]

## MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Cosa succede quando la velocità non rimane inalterata nel tempo, ma cambia?

Osservando il grafico, vediamo che ci sono intervalli di tempo in cui la velocità cresce, altri in cui cala ed altri in cui, addirittura, cambia di verso.



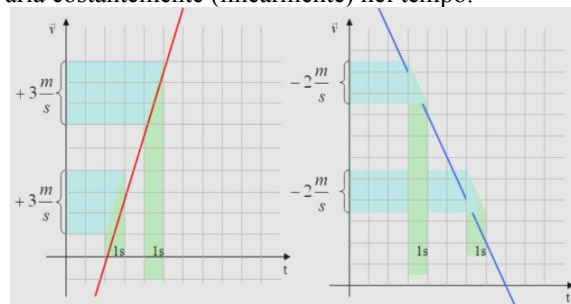
Introduciamo ora un'altra grandezza fisica:

l'**accelerazione** che esprime la variazione della velocità nell'unità di tempo.

Per definizione abbiamo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{MOTO, 6}$$

Si parla di accelerazione costante quando la velocità varia costantemente (linearmente) nel tempo.



Ciò significa, ad esempio, che in ogni secondo avviene una variazione di velocità pari a  $3\text{m/s}$ , come mostra il grafico di sinistra; oppure che in ogni secondo la velocità cala di  $2\text{m/s}$  come mostra il grafico di destra.

Lavoriamo un po' con la MOTO, 6; abbiamo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

moltiplichiamo a destra e a sinistra per  $\Delta t$ :

$$\vec{a} \cdot \Delta t = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$

e quindi:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t \quad \text{MOTO, 7}$$

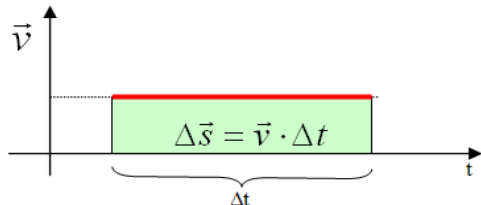
La MOTO, 7 si chiama **legge oraria delle velocità** nel caso del moto uniformemente accelerato.

Essa dà in ogni istante il valore della velocità del corpo in esame, basta conoscere la velocità all'istante iniziale ( $\vec{v}_i$ ), il tempo trascorso ( $\Delta t$ ) e l'accelerazione avuta ( $\vec{a}$ ).

# Fisica II

Ed ora occupiamoci dello spazio percorso  $\Delta \vec{s}$  durante la fase di accelerazione.

Studiando il moto rettilineo ed uniforme, abbiamo visto che lo spazio percorso è proporzionale al tempo, Questo spazio veniva calcolato semplicemente moltiplicando la velocità (costante) per il tempo, ed era un po' come trovare l'area di un rettangolo.

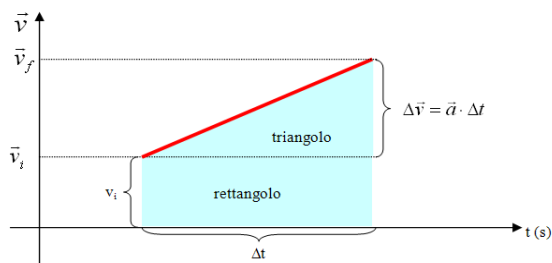


Nel caso del moto uniformemente accelerato la velocità aumenta (o cala) in modo regolare, da un valore  $v_i$  ad un valore  $v_f$  nel tempo  $\Delta t$ . Se la velocità non variasse e mantenesse sempre lo stesso valore iniziale  $v_i$  il moto sarebbe rettilineo ed uniforme e lo spazio percorso sarebbe dato da:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t$$

Adesso, invece, la velocità continua ad aumentare regolarmente e quindi non vengono più percorsi spazi uguali in tempi uguali, ma spazi sempre maggiori negli uguali tempi successivi.

Il seguente grafico mostra le variazioni della velocità in funzione del tempo, nel caso di moto uniformemente accelerato:



Oltre all'area del rettangolo  $\vec{v}_i \cdot \Delta t$  ci sarà adesso da aggiungere anche l'area del triangolo  $\frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \Delta \vec{v}$ , se vogliamo che anche ora lo spazio percorso  $\Delta \vec{s}$  sia rappresentato dall'area sotto il grafico (v,t).

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \cdot \Delta t$$

Dalla MOTO,6 abbiamo, facendo la formula inversa:  $\Delta \vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$  quindi:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \Delta t \cdot \Delta t$$

da cui:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 \quad \text{MOTO, 8}$$

e, visto che  $\Delta \vec{s} = \vec{s}_f - \vec{s}_i$  possiamo anche scrivere:

$$\vec{s}_f - \vec{s}_i = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \Delta t^2$$

da cui:

$$\vec{s}_f = \vec{s}_i + \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \Delta t^2 \quad \text{MOTO, 9}$$

Sia la MOTO, 8 che la MOTO, 9 rappresentano la legge oraria dello spazio percorso nel caso del moto uniformemente accelerato.

In esse  $s_i$  è la posizione iniziale del corpo, nell'istante ( $t_i$ ) in cui inizia ad operare l'accelerazione ed  $s_f$  è la posizione finale nell'istante ( $t_f$ ) in cui l'accelerazione smette di agire.

Adesso otteniamo la stessa legge oraria in modo analitico.

Partiamo dalla MOTO, 4:  $\vec{s}_f = \vec{s}_i + \vec{v} \cdot \Delta t$  che vale per il moto rettilineo ed uniforme.

Nel caso del moto uniformemente accelerato la velocità varia linearmente da un valore  $v_i$  ad un valore  $v_f$ , avendo, nell'intervallo  $\Delta t$ , un valore medio  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_f}{2}$ .

Sostituiamo questo valore  $\langle \vec{v} \rangle$  al posto di  $v$  nella MOTO; 4:

$$\vec{s}_f = \vec{s}_i + \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_f}{2} \Delta t$$

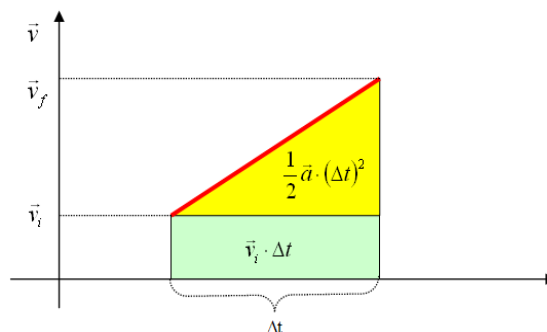
La MOTO; 7 dice che  $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t$ , quindi:

$$\vec{s}_f = \vec{s}_i + \frac{\vec{v}_i + \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t}{2} \cdot \Delta t$$

$$\vec{s}_f = \vec{s}_i + \frac{2 \cdot \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t}{2} \cdot \Delta t$$

da cui riotteniamo la MOTO, 9:

$$\Delta \vec{s}_f = \vec{s}_i + \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2$$

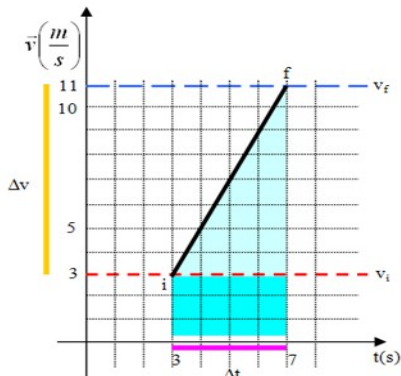


## ESERCIZI GUIDATI MOTO ACCELERATO

- 1 - Un punto materiale passa in 4 secondi (dal sec 3 al sec 7) dalla velocità di 3m/s alla velocità di 11m/s, in modo costante nel tempo. Calcolare l'accelerazione e lo spazio percorso da quel punto materiale in quell'intervallo di tempo.

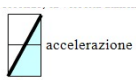
\* \* \*

Disegniamo subito il grafico (v,t) per visualizzare la situazione:



### Nota

Nel grafico possiamo visualizzare l'accelerazione: è la variazione di velocità che avviene ogni secondo, vediamo infatti che, spostandoci verso destra sull'asse dei tempi di un secondo, la velocità aumenta di 2m/s.



In esso vediamo il segmento obliquo che parte dalla situazione iniziale (i) al sec. 3 con la velocità di 3 m/s, alla situazione finale (f) al sec. 7 con la velocità di 11 m/s.

Applichiamo la MOTO; 6 per calcolare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{11 \frac{m}{s} - 3 \frac{m}{s}}{4 s} = \frac{8}{4} \frac{m}{s^2} = 2 \frac{m}{s^2}$$

Per calcolare lo spazio percorso bisogna calcolare l'area di quel trapezio azzurro.

La parte rettangolare, quella più scura, rappresenta lo spazio che il punto materiale avrebbe percorso se non ci fosse stata l'accelerazione.

Applichiamo la MOTO; 8:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 = 3 \frac{m}{s} \cdot 4s + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot 16s^2 = 12m + 16m = 28m$$



- 2 - Quanto tempo impiega un oggetto a cadere liberamente, senza attriti con l'aria, da un'altezza di 150 metri?

\* \* \*

Questo è il classico caso di un oggetto che, partendo da fermo, cade a terra a causa dell'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ , che come sappiamo è costante durante tutta la caduta (in prossimità della superficie terrestre). Il moto di caduta è quindi uniformemente accelerato: applichiamo la MOTO, 8 con  $\vec{h}$  al posto di  $\Delta \vec{s}$ , velocità iniziale nulla ( $\vec{v}_i=0$ ) e accelerazione  $\vec{g}$ .

$$\vec{h} = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (\Delta t)^2$$

Però l'incognita è il tempo, quindi c'è bisogno della formula inversa, che è:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot \vec{h}}{\vec{g}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150m}{9,81 \frac{m}{s^2}}} \approx 5,53 s$$

- 3 - Un oggetto viene scagliato verso il basso da un'altezza h con una velocità di 12m/s ed impiega 4 secondi per cadere a terra. Calcolare l'altezza da cui è partito l'oggetto e la velocità con cui arriva sul terreno.

\* \* \*

In questo caso ci sono tutti gli elementi per applicare la MOTO; 8 al completo:

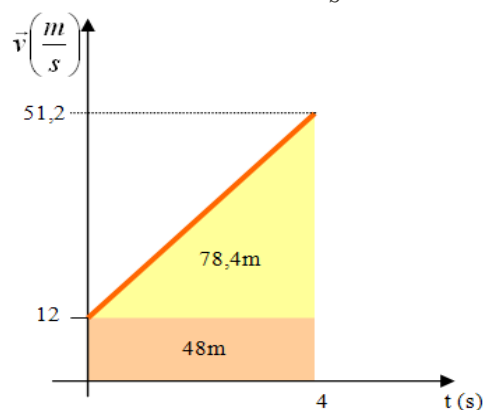
$$\vec{h} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot (\Delta t)^2 = 12 \frac{m}{s} \cdot 4s + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 16s^2$$



$$\vec{h} = 48m + 78,48 m = 126,48 m$$

Per calcolare la velocità con cui l'oggetto arriva a terra basta applicare la legge oraria delle velocità MOTO, 7 con le opportune modifiche:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g} \cdot \Delta t = 12 \frac{m}{s} + 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 4s = 51,24 \frac{m}{s}$$



4 - Osserva la seguente equazione:

$$\vec{s}(t) = -6 \frac{m}{s} \cdot t + 1,5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

- a) Cosa ti sembra rappresentare?
- b) Quanto vale  $s_0$  cioè  $s$  quando  $t=0$ ?
- c) Quanto vale  $s_5$  cioè  $s$  quando  $t=5$ ?
- d) Qual è il valore della velocità iniziale ( $t=0$ )?
- e) Quanto vale l'accelerazione?
- f) Costruisci il grafico (velocità tempo)
- g) In quale istante di tempo la velocità è nulla?

\* \* \*

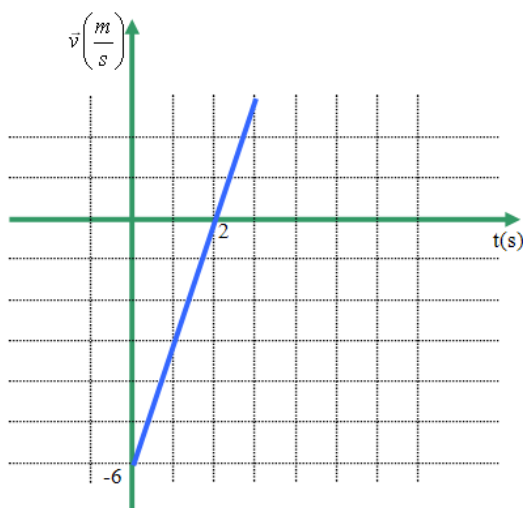
Rispondiamo con ordine alle varie domande:

- a) Sembra proprio la **legge oraria dello spazio percorso**, cioè la legge che dà istante per istante la posizione di un corpo in movimento:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2$$

- b) Se  $t=0$  si annulla tutto, quindi  $s=0$ , vuol dire che il corpo si trova nell'origine.
- c) Se  $t=5$  abbiamo:  

$$\vec{s}_5 = -6 \frac{m}{s} \cdot 5s + 1,5 \frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = -30m + 37,5m = 7,5m$$
 cioè al quinto secondo il corpo si trova **7,5 metri** dopo l'origine.
- d) Il valore della velocità iniziale si vede immediatamente, è **-6m/s**.
- e) Quell'**1,5m/s<sup>2</sup>** non è l'accelerazione, bensì **a/2**, quindi **a=3m/s<sup>2</sup>**.
- f) Il grafico (v,t) è il seguente:



- g) Dal grafico si vede che è a  $t=2s$  che la velocità del corpo è nulla. Questo però, si può anche ottenere con la legge oraria delle velocità  $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t$ , ponendo  $\vec{v}_f = 0$  e quindi:

$$0 = -6 \frac{m}{s} + 3 \frac{m}{s^2} t$$

da cui:

$$t = \frac{6 \frac{m}{s}}{3 \frac{m}{s^2}}$$

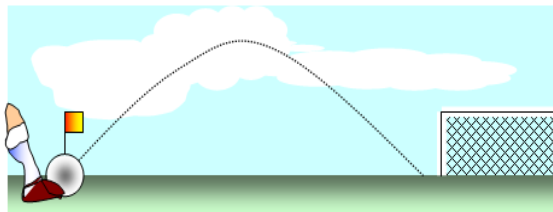
$$t = 2s$$

## ESERCIZI DA RISOLVERE MOTO ACCELERATO

1. Qual è l'accelerazione di un punto materiale, che, in 5 secondi, passa dalla velocità di 72km/h a quella di 35m/s? [a=3m/s<sup>2</sup>]
2. Calcolare l'accelerazione costante di un punto materiale che si ferma in 4 secondi, da una velocità di 36km/h. [a=-2,5 m/s<sup>2</sup>]
3. Calcolare la velocità finale di un corpo che, prima procede alla velocità di 6m/s e poi accelera con a=5m/s<sup>2</sup> per 8 secondi. [v=46m/s]
4. Un punto materiale parte da fermo e subisce un'accelerazione di 6m/s<sup>2</sup> per un tempo di 20 secondi. Calcolare lo spazio percorso dal punto materiale in quell'intervallo di tempo. [s=1200m]
5. Un punto materiale all'istante iniziale possiede già una velocità di 14m/s ed inoltre accelera, per 5 secondi con a=2m/s<sup>2</sup>. Calcolare lo spazio totale percorso in quei 5 secondi. [s=95m]
6. Un corpo dista già 50 metri dall'origine e procede alla velocità di 3 m/s all'istante iniziale. Tale corpo accelera per 4 secondi con un'accelerazione di 8m/s<sup>2</sup>. Quanto dista il corpo dall'origine, dopo quei 4 secondi? [d=126m]
7. Quant'è alto un ponte dal quale un sasso impiega 6s per cadere? Trascurare gli attriti. [h=176,4m]

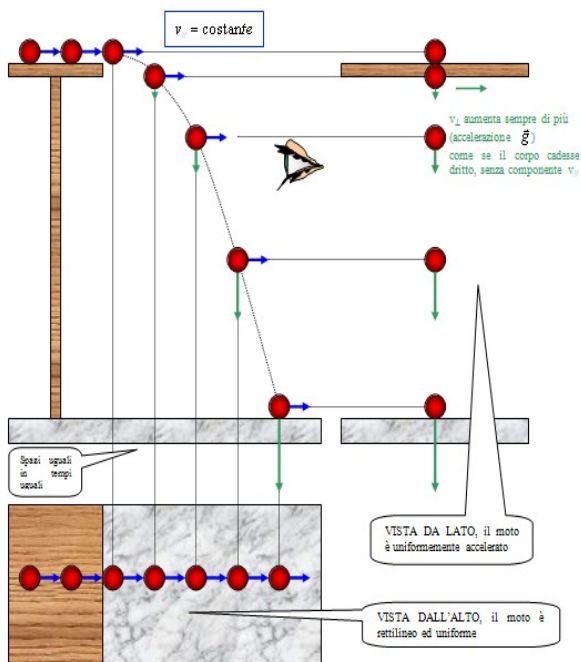
## MOTO PARABOLICO

È il moto che fanno tutti gli oggetti lanciati orizzontalmente o con velocità iniziale che forma un qualsiasi angolo diverso da  $90^\circ$  rispetto alla linea orizzontale.



Come avremo modo di vedere, il moto parabolico è la combinazione di due moti: uno rettilineo ed uniforme in una direzione ed un altro uniformemente accelerato in una direzione ortogonale alla prima.

Consideriamo dapprima un moto semi parabolico, come quello che si ha quando cade un oggetto da un tavolo, con l'oggetto che possiede, già prima di cadere, una componente orizzontale di velocità.



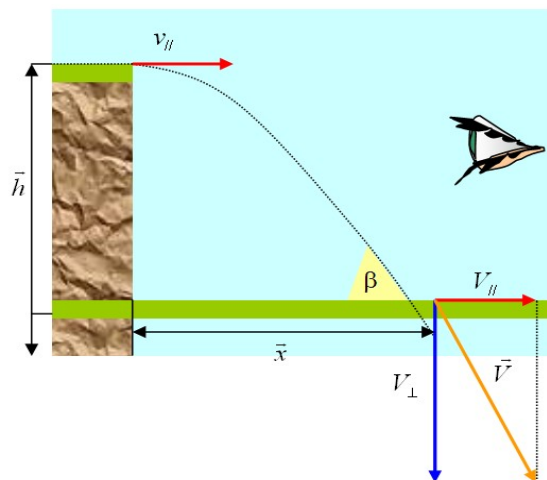
Facciamo subito un esempio concreto.

Consideriamo un corpo che cade da un'altezza di 20 metri, possedendo, al momento dello stacco, una velocità di 12 m/s parallela all'orizzonte.

Vogliamo calcolare la **gittata**  $\bar{x}$ , l'angolo  $\beta$  di impatto con il terreno e la velocità  $\bar{v}$  con cui esso arriva a terra.

Dal momento in cui il corpo perde contatto con il terreno, non c'è più la reazione vincolare e quindi esso cade verso il basso con accelerazione  $\bar{g} = 9,81 \frac{m}{s^2}$ . Il fatto che esso abbia anche una velocità parallela al

terreno (la  $\bar{v}_{||}$ ) non influenza minimamente la caduta verso il basso; a causa della  $\bar{v}_{||}$  c'è solo uno spostamento in avanti del corpo. Tale spostamento si chiama **gittata**.



Osservando la caduta da davanti (come l'occhio della figura) si vede un moto di caduta verticale da un'altezza h. Il tempo di caduta si calcola come se tale moto avvenisse in modo verticale:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\bar{h}}{\bar{g}}} = \sqrt{\frac{40m}{9,81 \frac{m}{s^2}}} = 2,02 s$$

Osservando la caduta dall'alto si vede un moto rettilineo ed uniforme, infatti in quella direzione non ci sono accelerazioni (trascuriamo anche l'attrito con l'aria). Il corpo ha quindi 2,02s di tempo per spostarsi in orizzontale con spazi uguali in tempi uguali, compiendo quindi una gittata:

$$\bar{x} = \bar{v}_{||} \cdot \Delta t = 12 \frac{m}{s} \cdot 2,02 s = 24,24 m$$

Nella caduta il corpo arriva a terra con una velocità:

$$\bar{v} = \bar{g} \cdot \Delta t = \bar{g} \cdot \sqrt{\frac{2\bar{h}}{\bar{g}}} = \sqrt{2 \cdot \bar{g} \cdot \bar{h}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 20m} = 19,8 \frac{m}{s}$$

Per quanto riguarda l'angolo di impatto, abbiamo:

$$\beta = \arctan \frac{\bar{v}_{\perp}}{\bar{v}_{||}} = \arctan(1,3125) = 53^\circ \text{ circa}$$

perché la componente perpendicolare della velocità la si è calcolata col teorema di Pitagora:

$$\bar{v}_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{||}^2} \approx 15,75 \frac{m}{s}$$

# Fisica II

- 1] Un punto materiale viene lanciato orizzontalmente con una velocità di 40m/s da un'altezza di 60 metri. Calcolare la gittata  $x$ , il modulo del vettore velocità con cui quel punto materiale arriva a terra e l'angolo di impatto con il terreno.

\* \* \*

Sappiamo che un corpo, in caduta libera, scende con moto uniformemente accelerato ( $\vec{a} = \vec{g}$ ), e sappiamo anche che l'unica accelerazione in gioco in questo caso è proprio quella di gravità.

Ora, ci dobbiamo rendere conto del fatto che la componente di velocità orizzontale non modifica assolutamente il tempo di caduta, in quanto su di essa non agisce alcuna accelerazione (in quella direzione); quindi calcoliamo il tempo di caduta:

$$\vec{h} = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot \vec{h}}{\vec{g}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \text{ m}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 3,5 \text{ s}$$

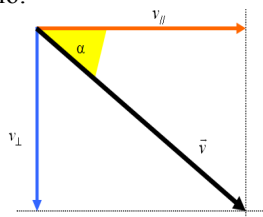
Questo tempo di caduta è anche il tempo durante il quale il corpo si sposta orizzontalmente, di moto rettilineo ed uniforme, quindi:

$$\vec{x} = \vec{v}_{||} \cdot \Delta t = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,5 \text{ s} = 140 \text{ m}$$

Per quanto riguarda la componente verticale della velocità, al momento dell'impatto abbiamo:

$$\vec{v} = \vec{g} \cdot \Delta t = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,5 \text{ s} = 34,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

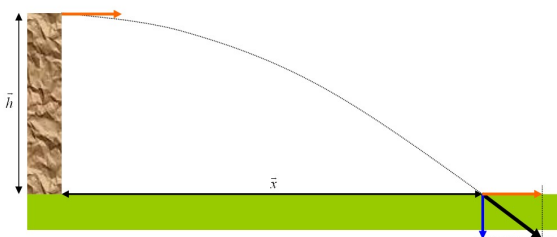
Il vettore  $\vec{v}$  (somma di  $\vec{v}_{||}$  e  $\vec{v}_{\perp}$ ) avrà come modulo:



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_{||}^2 + v_{\perp}^2} \approx 52,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

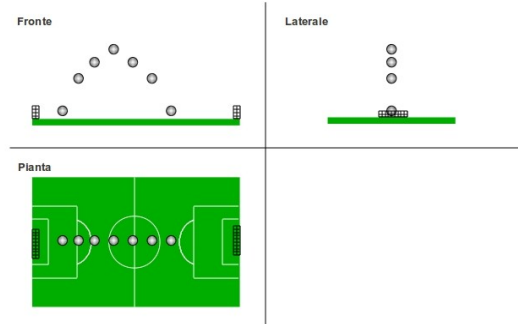
L'angolo di impatto con il suolo si ottiene calcolando l'angolo la cui tangente è data dal rapporto fra  $\vec{v}_{\perp}$  e  $\vec{v}_{||}$ :

$$\alpha = \arctan \frac{\vec{v}_{\perp}}{\vec{v}_{||}} = \arctan \frac{34,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 41^\circ$$



Ora, consideriamo le traiettorie paraboliche complete, con parte ascendente e parte discendente, come quelle che descrive il pallone rinvio dal portiere o quelle descritte dai proiettili di artiglieria sparati dai cannoni.

Anche in questo caso, essendoci accelerazioni (quella di gravità  $\vec{g}$ ) solo lungo la componente verticale del moto, si avrà moto uniformemente accelerato in quella direzione e moto rettilineo ed uniforme nella direzione orizzontale.



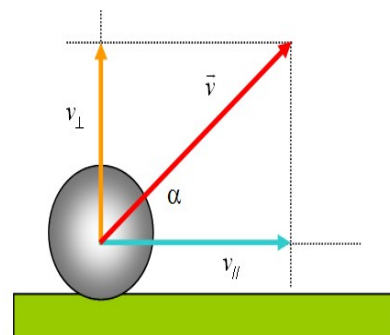
Se conosciamo la velocità di partenza ( $\vec{v}$ ) della palla e l'angolo  $\alpha$  (alzo), possiamo determinare la massima altezza ( $\vec{h}$ ) raggiunta dal pallone (distanza fra il terreno ed il vertice della parabola) e la gittata ( $\vec{x}$ ), cioè la lunghezza del rinvio.

Come esempio consideriamo un pallone calcciato ad una velocità di 90 km/h con un alzo di 40°.

Trasformiamo la velocità da km/h a m/s

$$|\vec{v}| = \frac{90000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Scomponiamo il vettore  $\vec{v}$  in:



$$\vec{v}_{||} = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(40^\circ) = 16,07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}_{\perp} = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(40^\circ) = 19,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Analizziamo dapprima la componente verticale di questo moto parabolico. La componente  $\vec{v}_{\perp}$  è la velocità iniziale di un moto rallentato da  $\vec{g}$  nella parte di salita, fino alla sommità, dove la velocità verticale finale è nulla.

## Fisica II

Applichiamo la legge oraria delle velocità del moto uniformemente accelerato:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t$$

cioè, in questo caso:

$$0 = \vec{v} - \vec{g} \cdot \Delta t$$

da cui:

$$\Delta t = \frac{v}{g}$$

sostituendo i nostri valori:

$$\Delta t = \frac{16,07 \frac{m}{s}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 1,64 s$$

questo è il tempo di salita (metà parabola).

Se ora applichiamo la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot (\Delta t)^2$$

che nel nostro caso è:

$$\vec{h} = \vec{v}_i \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot (\Delta t)^2$$

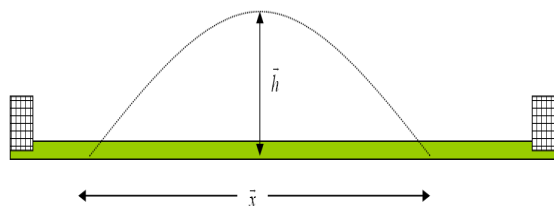
abbiamo:

$$\vec{h} = 16,07 \frac{m}{s} \cdot 1,64 s - 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot 2,7 s^2 = 13,12 m$$

che è la massima altezza raggiunta dal pallone.

Per quanto riguarda la gittata, basta moltiplicare la componente orizzontale di  $\vec{v}$  per il doppio di  $\Delta t$ , avendo, in direzione orizzontale un moto rettilineo ed uniforme:

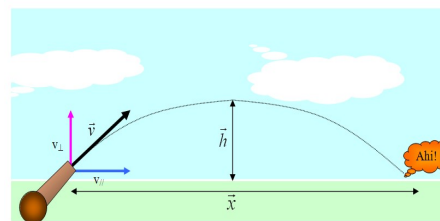
$$\vec{x} = \vec{v}_{//} \cdot 2 \cdot \Delta t = 19,15 \frac{m}{s} \cdot 2 \cdot 1,64 s = 62,81 m$$



1] Un cannone spara un proiettile alla velocità di 500 m/s e con un alzo di 40°.

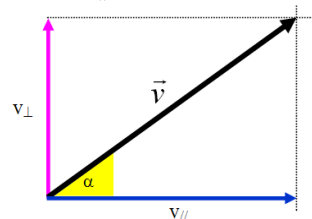
Calcolare, trascurando l'attrito con l'aria, la gittata e l'altezza massima raggiunta dal proiettile a metà volo.

(Pensare il cannone sotto terra, con la bocca al livello del suolo, in modo da poter trascurare le sue dimensioni.)



\* \* \*

Il primo lavoro da fare è quello di scomporre il vettore velocità di uscita del proiettile nelle due componenti  $v_{\perp}$  e  $v_{//}$ :



poi, usando la trigonometria:

$$\vec{v}_{\perp} = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 500 \frac{m}{s} \sin(40^\circ) = 500 \frac{m}{s} \cdot 0,643 = 321 \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{//} = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 500 \frac{m}{s} \cos(40^\circ) = 500 \frac{m}{s} \cdot 0,766 = 383 \frac{m}{s}$$

Per calcolare il tempo impiegato dal proiettile per arrivare alla sommità della traiettoria, analizziamo la direzione perpendicolare al terreno, lungo la quale il moto del proiettile è uniformemente accelerato.

Scriviamo la legge oraria delle velocità, nella quale la velocità iniziale è la  $v_{\perp}$ , mentre quella finale è 0 e l'accelerazione (negativa) è g:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t$$

$$0 = \vec{v}_i - \vec{g} \cdot \Delta t$$

$$\vec{g} \cdot \Delta t = \vec{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{\vec{v}}{\vec{g}} = \frac{321 \frac{m}{s}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 32,72 \frac{m}{s}$$

Questo che abbiamo appena trovato è il tempo di metà volo, in quanto nella seconda parte il proiettile scende compiendo una traiettoria simmetrica a quella di salita. Visto dall'alto, cioè

# Fisica II

lungo la direzione orizzontale, il moto è rettilineo ed uniforme, quindi il proiettile, percorrendo spazi uguali in tempi uguali, durante il tempo  $2 \cdot \Delta t$  percorrerà la distanza:

$$\vec{x} = 2 \cdot \Delta t \cdot \vec{v}_{//} = 2 \cdot 32,75 \text{ s} \cdot 383 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25086,5 \text{ m}$$

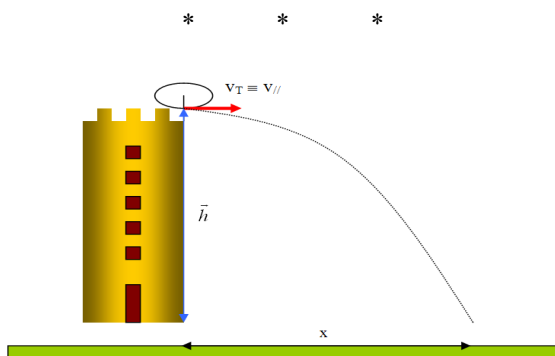
La massima altezza, al centro della traiettoria, dopo il tempo  $\Delta t$ , si trova applicando la legge oraria alla direzione perpendicolare, nella prima parte (quella ascendente) del volo: cioè:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2$$

$$h = \vec{v}_\perp \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot (\Delta t)^2$$

$$\vec{h} = 321 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 32,75 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (32,75 \text{ s})^2 = 5251 \text{ m}$$

- 2] Dall'alto dei 60 metri di una torre, un ragazzo fa ruotare a mo' di fionda un sasso, con raggio di 1,5 metri ed una frequenza di 2Hz. Il piano di rotazione è parallelo al terreno. Il sasso viene lasciato partire quando la direzione del vettore  $v$  (velocità periferica) è ortogonale alla torre e al piano di osservazione. Quanti metri distante dalla torre va a cadere il sasso?



Conosciamo la frequenza del moto circolare della fionda, calcoliamo pertanto la velocità angolare:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 \frac{1}{\text{s}} = 12,56 \frac{1}{\text{s}} = 12,56 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

adesso calcoliamo la velocità periferica o tangenziale:

$$\vec{v}_t = \omega \cdot \vec{r} = 12,56 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1,5 \text{ m} = 18,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Questa velocità coincide con la velocità parallela al terreno  $v_{//}$  con la quale il sasso incomincia la sua caduta parabolica.

La torre è alta 60 metri, quindi, da essa, il sasso impiega:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \vec{h}}{\vec{g}}} = \sqrt{\frac{120 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{12,24 \text{ s}^2} = 3,5 \text{ s}$$

per cadere al suolo, sia che esso cada verticalmente o che cada con la traiettoria a forma di semiparabola.

Durante il tempo di questa caduta il sasso, nella direzione parallela al suolo, procede di moto rettilineo ed uniforme e quindi percorre un tratto:

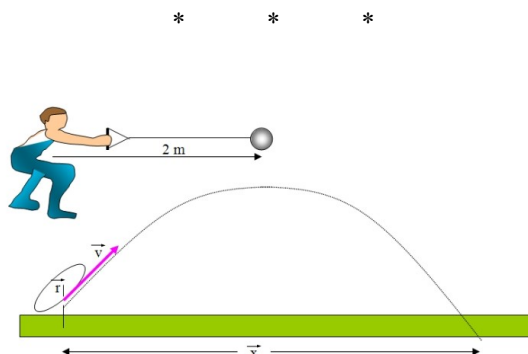
$$\vec{x} = \vec{v}_{//} \cdot \Delta t = 18,84 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,5 \text{ s} \simeq 66 \text{ m}$$

- 3] Supponiamo che durante una gara di lancio del martello un atleta riesca a scagliare l'attrezzo a 90 metri.

Le braccia con il cordino che collega la sfera metallica abbiano una lunghezza di 2 metri.

Supponiamo che l'atleta riesca a lasciare il martello proprio mentre il suo piano di rotazione forma un angolo di  $45^\circ$  con quello del suolo dello stadio, come mostra la figura.

Calcoliamo la frequenza con cui bisogna far ruotare la sfera metallica per compiere il risultato sopra citato.



Conosciamo la gittata  $x$  e sappiamo che:

$$\vec{x} = \vec{v}_{//} \cdot 2 \Delta t$$

però, non conosciamo né  $\vec{v}_{//}$ , né  $\Delta t$ ; sappiamo però, che lanciando a  $45^\circ$ , le due componenti:  $\vec{v}_\perp$  e  $\vec{v}_{//}$  sono identiche, quindi, anziché scrivere:

$$\Delta t = \frac{\vec{v}}{\vec{g}} \quad \text{potremo scrivere:} \quad \Delta t = \frac{\vec{v}_{//}}{\vec{g}}$$

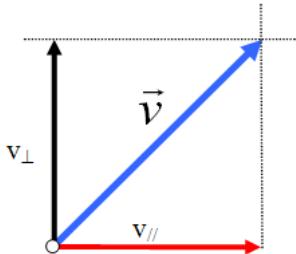
Avremo dunque:

$$\vec{x} = \vec{v}_{//} \cdot 2 \cdot \frac{\vec{v}_{//}}{\vec{g}} = \frac{2 \cdot v_{//}^2}{\vec{g}}$$

da cui:

$$v_{//} = \sqrt{\frac{\vec{x} \cdot \vec{g}}{2}} = \sqrt{\frac{90\text{m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}} = 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al momento del lancio avremo dunque:



Conoscendo la velocità tangenziale (teorema di Pitagora) possiamo calcolare la velocità angolare:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{29,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ m}} = 14,85 \frac{1}{\text{s}} = 14,85 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

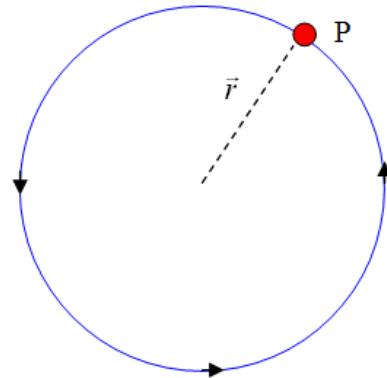
e quindi la frequenza:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{14,85 \frac{1}{\text{s}}}{2\pi} \approx 2,36 \frac{1}{\text{s}} = 2,36 \text{ Hz}$$

## MOTO CIRCOLARE UNIFORME

È il primo moto nel piano (bidimensionale) che studiamo. Questo è un argomento che riguarda un po' tutti i sistemi in rotazione: *ruote, dischi, ruote dentate, ingranaggi, moltipliche e ruote libere delle biciclette, macchine utensili come torni e frese, ecc ...*

Consideriamo un punto **P** che si muove lungo una circonferenza, di raggio  $\vec{r}$ , come mostra la figura.



Diamo le seguenti definizioni:

- Si chiama **periodo di rotazione (T)** il tempo, misurato in **secondi (s)** nel S.I., che impiega il punto P a percorrere un giro completo, cioè una circonferenza completa.
- Dicesi **frequenza (f)** il numero di giri completi compiuti dal punto P in 1 secondo.

Si ha che:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{CIRC, 1}$$

e l'unità di misura è  $\left[\frac{1}{\text{s}}\right] = [\text{Hz}] = \text{Hertz}$ .

Nelle operazioni useremo  $\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$ , mentre per presentare i risultati useremo [Hz].

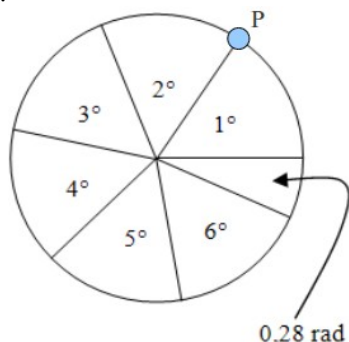
Di conseguenza:

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{CIRC, 2}$$

- **La velocità angolare ( $\omega$ )**  
Per definire la velocità angolare, bisogna prima definire il **radiante**.

Si definisce **radiante** l'angolo al centro della circonferenza sotteso da un qualsiasi arco lungo come il raggio della circonferenza stessa.

Da questa definizione e dalla formula con la quale, dato il raggio, si calcola la misura della circonferenza ( $C=2\pi r$ ), si capisce come un giro completo sia costituito da  **$2\pi$  radianti**. Circa **6,28 rad**.



La **velocità angolare  $\omega$**  è il numero di *radianti* descritti dal punto P ogni secondo.

Ci rendiamo subito conto che questa grandezza è abbastanza simile alla *frequenza  $f$* .

La differenza sta solo nel fatto che essa non usa come angolo unitario tutto l'angolo giro di  $2\pi$  radianti, bensì un solo radiante (che ovviamente è  $2\pi$  volte più piccolo).

Ne consegue che avremo:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{CIRC, 3}$$

oppure, tenendo conto della CIRC, 2:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{CIRC, 4}$$

Queste ultime 2 relazioni dicono che l'unità di misura di  $\omega$ , nel S.I. è  $\left[\frac{1}{s}\right]$ , proprio come la

frequenza. Useremo questa unità di misura nelle operazioni e useremo invece  $\left[\frac{rad}{s}\right]$  per

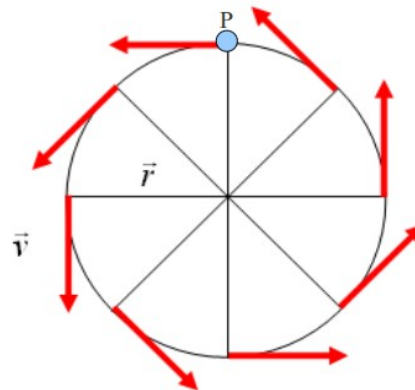
presentare i risultati relativi alla velocità angolare.

NOTA BENE!

*È proprio la velocità angolare  $\omega$  che si mantiene costante nel moto circolare uniforme, cioè il punto P percorre angoli uguali in tempi uguali, proprio come il punto P percorreva distanze uguali in tempi uguali nel moto rettilineo ed uniforme.*

Può stupire il fatto che gli angoli, in questo caso vengano misurati in radianti (un'unità di misura così scomoda ed inusuale) anziché in gradi, come si fa di solito. Per ora possiamo dire che il radiante è un'unità di misura non soggettiva (inventata dall'uomo, come i 360 gradi), ma oggettiva, in quanto propria delle circonferenze, perché legata al loro raggio e non a numeri "casuali" o "comodi" per i calcoli.

- La **velocità periferica o tangenziale** ( $\vec{v}$ ), cioè l'effettiva velocità del punto P (quella che già conosciamo, misurata in m/s), è molto meno importante della  $\omega$  nel caso del moto circolare uniforme.



Notiamo come essa sia stata indicata come vettore: tale velocità, infatti si mantiene costante come intensità, cioè come valore numerico, ma continua a cambiare direzione. Pertanto cambia proprio il vettore stesso, cambia la velocità! Saremo quindi in presenza di una accelerazione. Accelerazione un po' strana, come vedremo.

Nella figura vediamo alcuni vettori  $\vec{v}$  (dovrebbero essere infiniti) che ruotano, assumendo, in un giro completo, tutte le possibili direzioni del piano.

*Notiamo anche come questi vettori siano sempre ortogonali al raggio e quindi sempre tangenti alla circonferenza nel punto P.*

Se ora consideriamo anche il cerchio contenuto nella circonferenza e pensiamo alle velocità tangenziali (o periferiche) dei vari punti che stanno sul raggio, ci rendiamo conto che queste saranno sempre più basse man mano che si arriva al centro, fino ad annullarsi, proprio come succede sulle giostre dei bambini piccoli: i cavallini all'interno si muovono più lentamente delle automobiline che si trovano all'esterno, anche se tutto quello che ruota ha la stessa velocità angolare.

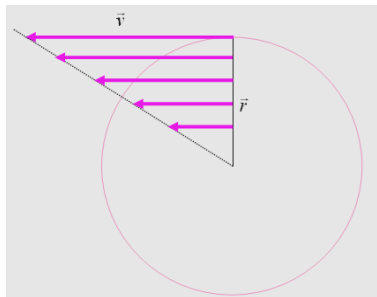
Calcoliamo la velocità come al solito, cioè facendo il rapporto fra lo spazio percorso ed il tempo impiegato per percorrerlo. In questo caso il modulo della velocità periferica del punto P si otterrà facendo il rapporto fra l'intera circonferenza  $C$  ed il periodo  $T$ .

$$\vec{v} = \frac{C}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vec{r}}{T}$$

ora, tenendo conto della CIRC, 4 possiamo scrivere:

$$\vec{v} = \omega \cdot \vec{r} \quad \text{CIRC, 5}$$

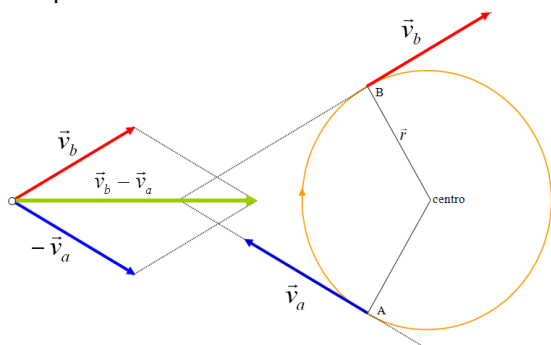
Notiamo come ci sia proporzionalità diretta fra la *velocità tangenziale* ed il *raggio* e come la velocità angolare  $\omega$  funga da *costante di proporzionalità*.



La figura mostra i vettori che rappresentano le varie velocità tangenziali che si accorciano fino ad annullarsi nell'origine e come il loro "accorciamento" sia lineare.

- L'**accelerazione centripeta** ( $a_c$ ) è l'ultima grandezza del moto circolare uniforme che studiamo in questa sede. Abbiamo già anticipato che siamo in presenza di una "strana" accelerazione che modifica solo la direzione e non il modulo della velocità tangenziale, ora la studiamo in dettaglio.

Consideriamo un punto P che si muove su una circonferenza da A a B di moto circolare uniforme e, siccome l'accelerazione è sempre data dal rapporto fra una variazione di velocità ed il tempo nel quale avviene tale variazione, facciamo la differenza tra i due vettori  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_b$  che costituiscono le velocità tangenziali nei punti A e B.

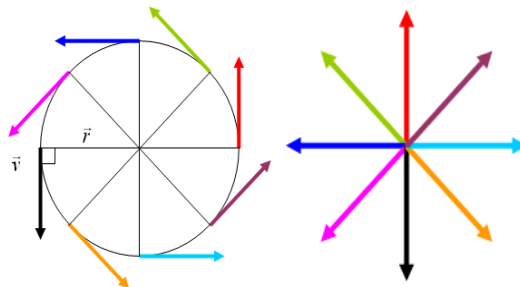


Notiamo come il vettore differenza  $\vec{v}_b - \vec{v}_a$  abbia una direzione che punta verso il centro.

Se adesso dividiamo questo vettore differenza per lo scalare  $\Delta t$  (il tempo impiegato dal punto P per passare da A a B) otteniamo il vettore accelerazione centripeta  $\vec{a}_c$  che punta ancora verso il centro, ecco perché questa accelerazione si chiama "centripeta"!

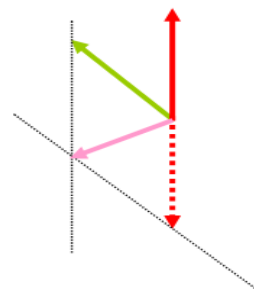
$$\vec{a}_c = \frac{\vec{v}_b - \vec{v}_a}{\Delta t} \quad \text{CIRC, 6}$$

L'accelerazione centripeta non cambia il valore del modulo della velocità tangenziale, ma solamente la sua direzione; e lo fa continuamente, facendo assumere, in un giro completo, tutte le possibili direzioni nel piano al vettore  $\vec{v}$ .

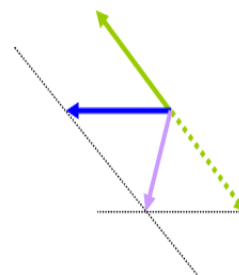


I diversi colori indicano i diversi vettori  $\vec{v}$  lungo un giro completo (*naturalmente dovrebbero essere infiniti!*). Nella figura di destra vediamo gli stessi vettori traslati in modo che abbiamo le "code" in comune.

Supponiamo di cominciare con quello **rosso**, per poi passare a quello **verde** (verso antiorario di rotazione). La differenza fra questi due vettori ( $\mathbf{V}-\mathbf{V}$ ) sarà il vettore **rosa**.

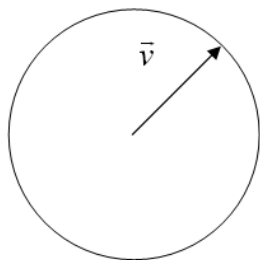


Ora, continuando il giro, facciamo la differenza fra il vettore **blu** ed il vettore **verde**, per ottenere il vettore **viola**.



Se ripetiamo questa operazione su tutto il giro, otteniamo la figura a lato:

In questo caso la poligonale di tutte queste differenze (cioè la loro somma) è un ottagono. Invece, se avessimo, in teoria, tracciato infiniti vettori, avremmo una circonferenza di raggio e quindi di "lunghezza"  $2 \cdot \pi \cdot \vec{v}$ .



Questa circonferenza rappresenta la totale variazione di direzioni del vettore  $\vec{v}$  in un giro completo. Quindi, l'accelerazione centripeta si potrà ottenere facendo il rapporto fra tale grandezza ed il periodo T di rotazione:

$$\vec{a}_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vec{v}}{T} \quad \text{CIRC, 7}$$

Vale la CIRC, 5, quindi potremo scrivere:

$$\vec{a}_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot \vec{r}}{T}$$

vale anche la CIRC, 4, quindi:

$$\vec{a}_c = \omega^2 \cdot \vec{r} \quad \text{CIRC, 8}$$

ma anche:

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{\vec{r}} \quad \text{CIRC, 9}$$

visto che  $\omega = \frac{\vec{v}}{\vec{r}}$ .

Ne scriviamo ancora un'altra:

$$\vec{a}_c = \omega \cdot \vec{v} \quad \text{CIRC, 10}$$

la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

Le CIRC, 7, CIRC, 8; CIRC, 9 e CIRC, 10 sono tutte formule che danno il modulo dell'accelerazione centripeta nel caso del moto circolare uniforme; facendo l'analisi dimensionale con tutte quante si scopre che

anche questa accelerazione si misura in  $\left[ \frac{m}{s^2} \right]$ .

Nei vari esercizi si cercherà di usare la più opportuna, in base ai dati già in possesso.

- 1] Un punto materiale ruota di moto circolare uniforme ad una distanza di **4 metri** (raggio) e con periodo di **2 secondi**. Calcolare la frequenza, la velocità angolare, la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta.

\* \* \*

Applichiamo la CIRC, 1 e dal periodo, calcoliamo la frequenza:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0,5 \frac{1}{s} = 0,5 \text{ Hz}$$

Conoscendo la frequenza, con la CIRC, 3 possiamo calcolare la velocità angolare:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \frac{1}{s} = 3,14 \frac{1}{s} = 3,14 \frac{\text{rad}}{s}$$

Adesso, con la CIRC, 5 troviamo la velocità tangenziale, o periferica:

$$\vec{v} = \omega \cdot \vec{r} = 3,14 \frac{1}{s} \cdot 4 \text{ m} = 12,56 \frac{\text{m}}{s}$$

e con la CIRC, 7 l'accelerazione centripeta:

$$\vec{a}_c = \omega^2 \cdot \vec{r} = \left( 3,14 \frac{1}{s} \right)^2 \cdot 4 \text{ m} \approx 39,4 \frac{\text{m}}{s^2}$$

- 2] Un punto in moto circolare uniforme ha un'accelerazione centripeta di **100 m/s<sup>2</sup>** ed una frequenza di **5 Hz**. Calcolare le altre grandezze:  $\vec{v}$ ,  $\omega$ ,  $\vec{r}$  e **T**.

\* \* \*

Conoscendola frequenza si può subito calcolare la velocità angolare, con la CIRC, 3:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \frac{1}{s} = 31,4 \frac{1}{s} = 31,4 \frac{\text{rad}}{s}$$

e adesso che si conosce  $\omega$ , con l'inversa della CIRC, 8 si può trovare il raggio:

$$\vec{a}_c = \omega^2 \cdot \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a}_c}{\omega^2} = \frac{100 \frac{\text{m}}{s^2}}{\left( 31,4 \frac{1}{s} \right)^2} \approx 0,10 \text{ m}$$

conoscendo raggio e velocità angolare si può trovare la velocità tangenziale, con la CIRC, 5:

$$\vec{v} = \omega \cdot \vec{r} = 31,4 \frac{1}{s} \cdot 0,1 \text{ m} = 3,14 \frac{\text{m}}{s}$$

e per ultimo, calcoliamo il periodo di rotazione applicando la CIRC, 2, cioè facendo l'inverso della frequenza:

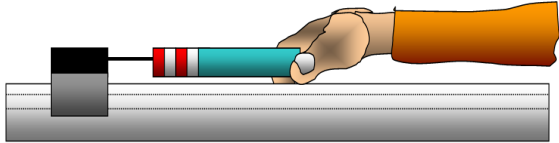
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5 \frac{1}{s}} = 0,2 \text{ s}$$

## LE LEGGI DELLA DINAMICA

In precedenza abbiamo studiato separatamente le forze e l'equilibrio dei corpi e il moto dal punto di vista cinematico, cioè senza indagarne le cause.

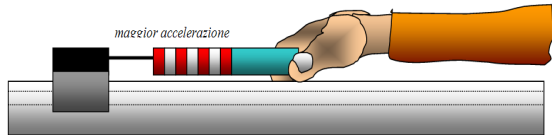
Ora studieremo l'effetto delle forze sui corpi, nel caso in cui queste non determinino una situazione di equilibrio, abbiano cioè la loro somma diversa da zero.

Per fare ciò applichiamo una molla (un dinamometro) ad un corpo posto su una rotaia ad aria:

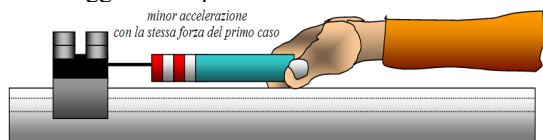


Osserviamo, come trainando l'oggetto con una forza costante, si abbia un evidente moto accelerato e non a velocità costante, come, forse, ci saremmo aspettati.

Osserviamo anche, che, se aumentiamo la forza traente, cioè deformiamo di più il dinamometro, risulta ancora più evidente l'accelerazione.

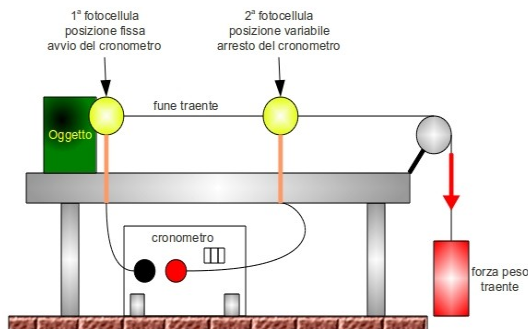


Un'altra osservazione qualitativa che possiamo fare è quella di veder diminuire l'accelerazione del corpo (minor aumento di velocità) se, mantenendo la stessa deformazione del dinamometro, carichiamo con ulteriori pesetti l'oggetto da spostare.



Però, per trovare la legge che lega la **forza impressa** all'**accelerazione** subita dal corpo dobbiamo eseguire delle misure. Ecco come viene eseguito l'esperimento:

**PRIMA FASE:** *si applica una forza costante ad un oggetto e se ne studia il moto risultante.* Usando la rotaia ad aria, si esegue una serie di misure di tempo su distanze diverse, la prima fotocellula è posta in corrispondenza del punto di partenza dell'oggetto, in modo che la sua velocità iniziale sia nulla.



Ecco un esempio di dati raccolti in questa maniera:

Distanza percorsa (m)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Tempo impiegato (s)	0,16	0,23	0,28	0,32	0,36	0,40	0,42	0,45

L'analisi di questi dati permette di evidenziare (entro l'errore sperimentale) il fatto che si tratta di un **moto uniformemente accelerato** e anche di calcolare il valore dell'accelerazione, usando la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2$$

da cui

$$\vec{a} = \frac{2 \cdot \Delta \vec{s}}{(\Delta t)^2} = \frac{1,6 \text{ m}}{(0,45 \text{ s})^2} = 7,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

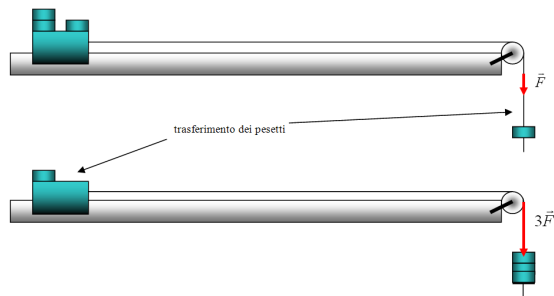
**SECONDA FASE:** *si applica la stessa forza traente costante a più di un oggetto simile al primo (a 2 oggetti, a 3, e così via...).* Bisogna sovrapporre all'oggetto delle massette (→pesi) che siano uguali alla somma di quella dell'oggetto più quella della massetta (→pesetto) che funge da forza traente (la spiegazione di questo accorgimento c'è nel punto successivo)

L'analisi delle serie di dati così ottenuto mostra i seguenti risultati:

- con **doppio** peso, accelerazione **metà** della precedente
- con **triplo** peso, accelerazione ridotta ad **un terzo**
- con **quadruplo** peso, accelerazione che diventa **un quarto**
- ...

Se ne deduce quindi che l'accelerazione è **inversamente proporzionale** al peso dell'oggetto posto in movimento.

**TERZA FASE:** *si varia la forza traente e si mantiene costante il "peso" dell'oggetto in movimento.* Anche questa operazione non è banale, in questo tipo di esperimento, infatti, come già intravisto nel punto precedente, fa parte dell'oggetto in movimento anche il pesetto che costituisce la forza traente. È necessario eseguire un travaso di pesetti dalla navetta sulla rotaia ad aria al supporto che raccoglie i pesetti che fungono da forza traente, per avere forza variabile e "peso" costante dell'oggetto in movimento.



Naturalmente, anche in questo caso usiamo le fotocellule e studiamo il moto dell'oggetto in movimento, proprio come abbiamo fatto in precedenza.

In questo caso si ottengono dati che mostrano come l'**accelerazione** sia direttamente proporzionale al numero di pesetti traenti, cioè **direttamente proporzionale alla forza traente**.

Si può anche scrivere viceversa:

**forza direttamente proporzionale all'accelerazione**

$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

$$\vec{F} = \text{costante} \cdot \vec{a}$$

Questa costante viene chiamata **massa inerziale** del corpo in movimento ed è indicata con la lettera **m**; la sua unità di misura è il **kg** (chilogrammo) ed è direttamente collegata con l'oggetto in moto.

La massa di un oggetto è una misura della resistenza che oppone alle forze che agiscono su di esso per cambiargli lo stato di moto. Questa proprietà che hanno i corpi di "resistere" alle forze viene anche chiamata **inerzia**.

La massa è una grandezza scalare! Essa è rappresentata da un numero (di chilogrammi) che rimane invariato se non ci sono aggiunte o diminuzioni di materia.

La massa non va confusa con il peso, prima abbiamo usato impropriamente la parola peso, è per questo motivo che l'abbiamo sempre messa fra virgolette. Come vedremo tra poco, il peso è una forza (un vettore) che dipende anche dall'accelerazione di gravità, mentre la massa è uno scalare.

Possiamo notare come, nella terza fase, trasferendo i pesetti, **abbiamo mantenuto costante la massa dell'oggetto in movimento**.

## SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA o SECONDA LEGGE DI NEWTON

Da quanto visto in precedenza, possiamo scrivere così:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{DIN, 1}$$

da cui:

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} \quad \text{DIN, 2}$$

che mostra come la **massa inerziale** di un corpo sia data dal rapporto fra il modulo della forza che agisce ed il valore dell'accelerazione che ne deriva.

Dalla DIN, 2 si ottiene anche l'unità di misura della massa.

Ricordando che il Newton (N) equivale a  $\left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right]$ ,

dividendo per un'accelerazione  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  si ottengono chilogrammi [kg].

Vale anche:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{DIN, 3}$$

che mostra come l'accelerazione impressa ad un corpo da una certa forza sia data dal rapporto fra la forza stessa e la massa del corpo. I vettori indicano anche che l'accelerazione ha stessa direzione e verso della forza.

Lo stesso discorso vale anche se sul corpo agiscono più forze contemporaneamente, in questo caso  $\vec{F}$  rappresenta la somma di tutte quante, cioè la loro risultante.

Ecco l'enunciato della seconda legge:

***La risultante delle forze applicate ad un corpo è uguale al prodotto della massa del corpo per l'accelerazione che esso riceve.***

## PRIMA LEGGE DELLA DINAMICA o LEGGE D'INERZIA

Nel caso in cui nella DIN, 1 la forza è nulla ( $\vec{F}=0$ ) è nulla anche l'accelerazione ( $\vec{a}=0$ ), pertanto il moto del corpo di massa  $m$  non potrà che essere senza accelerazioni e cioè rettilineo ed uniforme.

Si ha:

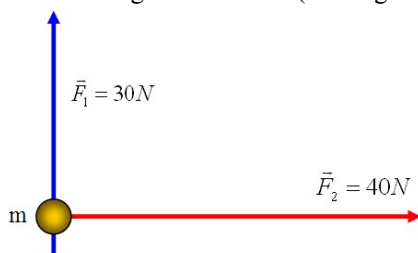
$$0 = m \cdot 0$$

Si può anche affermare che la prima legge della dinamica è un caso particolare della seconda, quello con  $\vec{F}=0$ . Ecco l'enunciato:

*Se su di un corpo non agiscono forze, oppure se la somma vettoriale di tali forze è uguale a zero, allora tale corpo o sta fermo, oppure si muove di moto rettilineo ed uniforme (non ha accelerazioni!).*

Facciamo un paio di esempi:

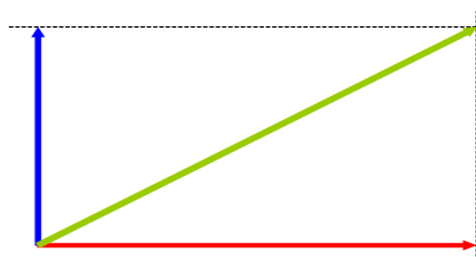
Su un corpo avente la **massa** di **12,5kg** agiscono due forze con direzioni ortogonali fra loro. (vedi figura).



Calcoliamo il valore dell'accelerazione impressa al corpo ed indichiamo la direzione ed il verso di questo vettore.

\* \* \*

Sommiamo i due vettori:



$$\vec{F} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{900 \text{ N}^2 + 1600 \text{ N}^2} = 50 \text{ N}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{50 \text{ N}}{12,5 \text{ kg}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La direzione ed il verso dell'accelerazione sono gli stessi della risultante  $\vec{F}$  delle forze, quindi il corpo, se inizialmente fermo, si sposterà obliquamente, come mostra il **vettore** della figura.

- ❖ Calcoliamo la massa di un corpo che riceve un'accelerazione di  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  se viene sottoposto ad una forza di 18 N.

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} = \frac{18 \text{ N}}{3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = 6 \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = 6 \text{ kg}$$

## IL PESO DEI CORPI

Si indica con la lettera  $\vec{F}_g$  e si ottiene applicando la seconda legge della dinamica, moltiplicando cioè la massa  $m$  del corpo per l'accelerazione di gravità  $\vec{g}$ .

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} \quad \text{DIN, 4}$$

A proposito di peso, dobbiamo dire che, quando un corpo sta cadendo, è soggetto alla forza di gravità, che è sempre  $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$ , però "non ha peso". Si parla di peso quando i corpi sono appoggiati e subiscono la reazione vincolare, (vedi capitolo sull'equilibrio).

## TEOREMA DELL'IMPULSO

Riscriviamo la legge che rappresenta il secondo principio della dinamica, la DIN, 1.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Al posto dell'accelerazione  $\vec{a}$  scriviamo la sua definizione, cioè:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ora, moltiplichiamo per  $\Delta t$  sia a destra che a sinistra:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \quad \text{DIN, 5}$$

La DIN, 5 è una prima rappresentazione del teorema dell'impulso, (dicesi impulso  $\vec{I}$  il prodotto della forza per il suo tempo di applicazione) essa dice:

*Il prodotto di una forza  $F$  (applicata ad un corpo di massa  $m$ ) per il tempo  $\Delta t$  della sua applicazione provoca una variazione di velocità  $\Delta v$  dello stesso corpo.*

Ora, invece di  $\Delta v$ , nella DIN, 5 scriviamo  $\vec{v}_f - \vec{v}_i$  :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i)$$

da cui:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i)$$

chiamiamo **quantità di moto (p)** il prodotto della massa per la velocità del corpo, in modo da avere:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

cioè:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} \quad \text{DIN, 6}$$

oppure

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} \quad \text{DIN, 7}$$

La DIN, 6 e la DIN, 7 sono altre rappresentazioni del teorema dell'impulso, esse dicono che:

*Un impulso provoca una variazione della quantità di moto del corpo a cui è applicato.*

Il teorema dell'impulso è un modo diverso di esprimere la seconda legge della dinamica, invece di parlare di forza ed accelerazione, si parla di impulso e di quantità di moto.

➤ Quando si utilizza il teorema dell'impulso?

- Quando si vuol conoscere la variazione  $\Delta v$  della velocità di un corpo su cui agisce una forza  $\vec{F}_g$  per un tempo  $\Delta t$ , senza dover per forza passare dalla conoscenza dell'accelerazione.
- Quando in certi fenomeni, come urti, implosioni ed esplosioni, è praticamente impossibile conoscere il vero valore della forza.

# Fisica II

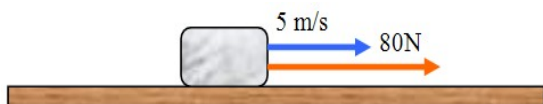
## ESEMPI LEGGI DINAMICA

- 1] Una forza di **80N** agisce per **3s** su un corpo di massa di **20kg** che già possiede la velocità di **5m/s** (forza e velocità iniziale hanno stessa direzione e stesso verso).

Calcolare:

- l'accelerazione impressa al corpo;
- la velocità finale;
- lo spazio percorso in quei 3 sec.

\* \* \*



Usiamo la DIN, 3 per calcolare l'accelerazione:

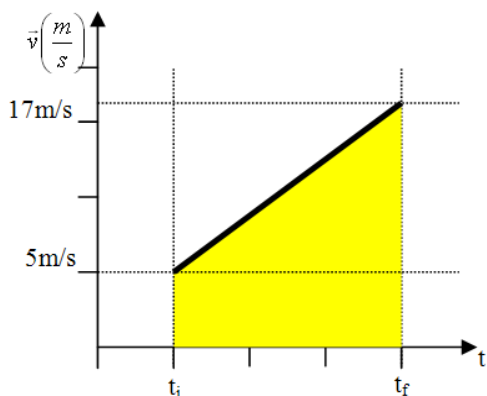
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{80 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e ora la legge oraria delle velocità per trovare la velocità finale:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot \Delta t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{s} = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Per quanto riguarda lo spazio percorso, si applica la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\text{s} + \frac{1}{2} 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 9\text{s}^2 = 33\text{m}$$



La velocità finale poteva essere calcolata anche con il teorema dell'impulso, così:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m} = \frac{80 \text{ N} \cdot 3\text{s}}{20 \text{ kg}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

poi

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta \vec{v} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- 2] Una forza di **60N** viene applicata per **4 secondi**, nella stessa direzione ma con verso contrario, ad un corpo di **30kg** che procede alla velocità di **6m/s**. Calcolare la velocità finale.

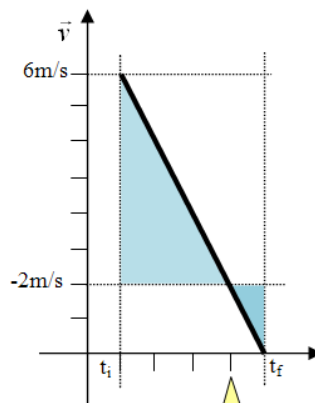
\* \* \*

Si può applicare subito il teorema dell'impulso DIN, 5 visto che non è richiesta l'accelerazione:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m} = \frac{-60 \text{ N} \cdot 4\text{s}}{30 \text{ kg}} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

poi, ovviamente:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta \vec{v} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Istante in cui si inverte la velocità e il corpo comincia ad andare indietro.

Calcoliamo anche: lo spazio percorso, con la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} + \frac{1}{2} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16\text{s}^2 = 40\text{m}$$

L'accelerazione l'abbiamo ricavata utilizzando la MOTO, 6 ( $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ).

Osservando il grafico, vediamo inoltre che il corpo procede in "avanti" per 3 secondi, si ferma e poi torna "indietro" per un secondo: In avanti procede per (area del triangolo sopra l'asse dei tempi) **(3s·6m/s)/2=9m**; mentre all'indietro procede (area del triangolo sotto l'asse dei tempi) per **(1s·2m/s)/2=1m**. In totale quindi il corpo procede in avanti per **8 metri (9m-1m)**.

# Fisica II

- 3] Calcoliamo la forza che riesce in **6 secondi** a far passare un corpo di **20kg** dalla velocità di **3m/s** a quella di **7m/s**, agendo nella stessa direzione e nello stesso verso delle due velocità.

\* \* \*

Questo esercizio si può risolvere in diversi modi:

- a) Calcolando l'accelerazione e successivamente la forza.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{7 \frac{m}{s} - 3 \frac{m}{s}}{6s} = \frac{4 \frac{m}{s}}{6s} \approx 0,67 \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 20 \text{ kg} \cdot 0,67 \frac{m}{s^2} = 13,4 \text{ N}$$

- b) Calcolando la differenza fra le due quantità di moto:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i$$

$$\Delta \vec{p} = 20 \text{ kg} \cdot 7 \frac{m}{s} - 20 \text{ kg} \cdot 3 \frac{m}{s} = 140 \frac{\text{kg} \cdot m}{s} - 60 \frac{\text{kg} \cdot m}{s} = 80 \frac{\text{kg} \cdot m}{s}$$

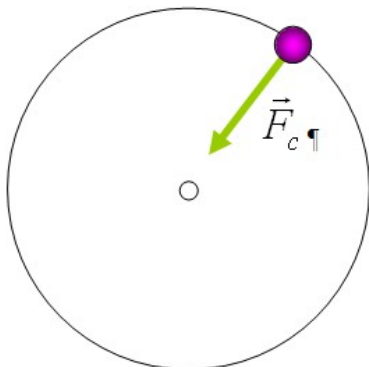
e poi applichiamo il teorema dell'impulso.

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{80 \frac{\text{kg} \cdot m}{s}}{6s} = 13,33 \text{ N}$$

**ATTENZIONE!!!** I due valori della forza, ottenuti con i due metodi sono leggermente diversi a causa delle diverse approssimazioni nei conti.

- 4] Calcolare la forza centripeta in grado di mantenere in moto circolare uniforme, con un raggio di **60cm** e un periodo di **2 secondi**, un corpo con una massa di **3kg**.

\* \* \*



La prima cosa da fare è trasformare quei 60 cm del raggio in metri, per avere la misura nel S.I.: **R=60cm=0,6m**.

Calcoliamo le grandezze cinematiche del moto circolare in esame:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0,5 \frac{1}{s} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 6,28 \text{ rad} \cdot 0,5 \frac{1}{s} = 3,14 \text{ rad} \frac{1}{s} = 3,14 \frac{\text{rad}}{s}$$

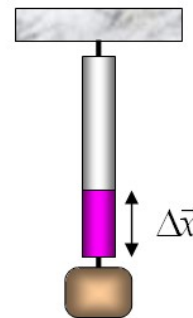
$$\vec{a}_c = \omega^2 \cdot \vec{R} = 9,86 \frac{1}{s^2} \cdot 0,6 \text{ m} \approx 5,92 \frac{m}{s^2}$$

E ora, calcoliamo la forza centripeta, usando la seconda legge di Newton

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c = 3 \text{ kg} \cdot 5,92 \frac{m}{s^2} = 17,76 \text{ N}$$

- 5] Calcolare la forza peso a cui è sottoposto un corpo di massa di **4kg** sulla superficie della Terra e l'allungamento di una molla con costante elastica **k=2000N/m** alla quale è appeso quel corpo.

\* \* \*



La forza peso si ottiene moltiplicando la massa per l'accelerazione di gravità:

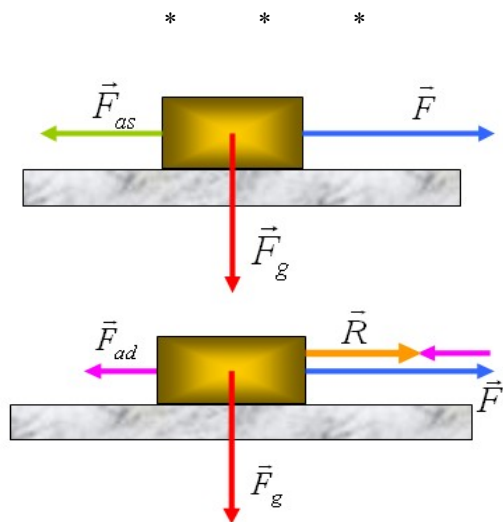
$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} = 4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 39,2 \text{ N}$$

mentre l'allungamento della molla si ottiene applicando la legge di Hooke con  $\vec{F}_g$  al posto di  $\vec{F}$  :

$$\vec{F}_g = k \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow \Delta \vec{x} = \frac{\vec{F}_g}{k} = \frac{39,2 \text{ N}}{2000 \text{ N/m}} = 0,0196 \text{ m}$$

## Fisica II

- 6] Tra le superfici che separano un corpo di massa **30kg** e il pavimento ci sono i seguenti coefficienti di attrito:  $\mu_s=0,6$  e  $\mu_d=0,4$ . Calcolare l'accelerazione che riesce ad imprimere a quel corpo una forza di **350N** applicata con direzione parallela a quella del pavimento orizzontale.



Calcoliamo la forza peso **P** del corpo:

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} = 30 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 294 \text{ N}$$

In questo caso la forza peso è ortogonale al pavimento, quindi la forza d'attrito le è proporzionale. Per quanto riguarda la forza di attrito statico abbiamo:

$$\vec{F}_{as} = \mu_s \cdot \vec{F}_g = 0,6 \cdot 294 \text{ N} = 176,4 \text{ N}$$

Ora, vediamo che la forza di **350N** applicata al corpo è maggiore di quella d'attrito (**350N > 176,4N**), quindi il corpo comincia a muoversi. Non appena il corpo si pone in movimento non si trova più in regime statico, bensì in quello dinamico, pertanto la forza d'attrito cala, ora vale:

$$\vec{F}_{ad} = \mu_d \cdot \vec{F}_g = 0,4 \cdot 294 \text{ N} = 117,6 \text{ N}$$

La forza **R** che traina il corpo sarà data, adesso, dalla differenza fra quei **350 N** applicati al corpo e la forza di attrito dinamico, che agisce con verso contrario

$$\vec{R} = \vec{F} - \vec{F}_{ad} = 350 \text{ N} - 117,6 \text{ N} = 232,4 \text{ N}$$

E per finire, per trovare l'accelerazione basta applicare semplicemente la seconda legge della dinamica:

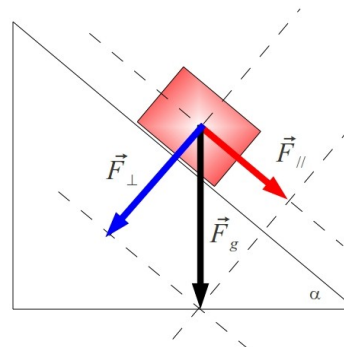
$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \frac{232,4 \text{ N}}{30 \text{ kg}} \approx 7,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- 7] Un corpo avente la massa di **50kg** è posto su un piano inclinato con la pendenza di **40°**. Il coefficiente di attrito statico fra le superfici di contatto (corpo-piano inclinato) è  $\mu_s=0,5$ , mentre quello dinamico vale  $\mu_d=0,3$ . Dire se il corpo, in queste condizioni, scivola lungo il piano o se resta fermo. Nel caso in cui si dovesse trovare che il corpo si mette in movimento, calcolare la sua accelerazione.

Si calcola subito la forza peso  $\vec{F}_g$  :

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} = 50 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 490 \text{ N}$$

Poi bisogna fare il disegno con la scomposizione del vettore forza-peso lungo le direzioni parallela e ortogonale al piano inclinato:



Si calcolano le componenti:  $\vec{F}_{||}$  e  $\vec{F}_{\perp}$  del vettore  $\vec{F}_g$ , con l'uso della trigonometria:

$$\vec{F}_{||} = |\vec{F}_g| \cdot \sin \alpha = 490 \text{ N} \cdot 0,64 \approx 315 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\perp} = |\vec{F}_g| \cdot \cos \alpha = 490 \text{ N} \cdot 0,766 \approx 375 \text{ N}$$

Adesso, con la componente  $\vec{F}_{\perp}$  si calcola la forza di attrito statico:

$$\vec{F}_{as} = \mu_{as} \cdot \vec{F}_{\perp} = 0,5 \cdot 375 \text{ N} = 187,5 \text{ N}$$

Si può rispondere alla prima domanda! Il corpo si mette in movimento, in quanto la componente  $\vec{F}_{||}$  è maggiore della forza di attrito statico (**315N > 187,5N**).

Però, in regime dinamico l'attrito cala, vale:

$$\vec{F}_{ad} = \mu_{ad} \cdot \vec{F}_{\perp} = 0,3 \cdot 375 \text{ N} = 112,5 \text{ N}$$

La forza risultante lungo il piano è quindi, in regime dinamico:

$$\vec{R} = \vec{F}_{||} - \vec{F}_{ad} = 315 \text{ N} - 112,5 \text{ N} = 202,5 \text{ N}$$

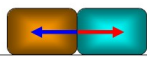
Per quanto riguarda l'accelerazione, si ha quindi:

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \frac{202,5 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = 4,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ora, torniamo alla teoria e riconsideriamo la DIN, 7:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

da essa vediamo che se non ci sono forze che agiscono dall'esterno di un corpo, non c'è impulso e quindi non c'è neanche variazione di quantità di moto del corpo stesso, si dice che **la quantità di moto si conserva!** (affronteremo meglio questo argomento quando studieremo gli urti).



Se abbiamo un sistema composto da due masse  $m_1$  ed  $m_2$ , con i due corpi che premono l'uno contro l'altro con le forze  $F_1$  ed  $F_2$ , senza che vi siano forze che agiscono dall'esterno, avremo:

$$\Delta \vec{p} = 0$$

cioè:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = -m_2 \cdot \vec{v}_2$$

dividiamo sia a destra che a sinistra per  $\Delta t$ :

$$m_1 \cdot \frac{\vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\vec{v}_2}{\Delta t}$$

da cui:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = -m_2 \cdot \vec{a}_2$$

e pertanto, valendo la seconda legge di Newton:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{DIN, 8}$$

La DIN, 8 rappresenta la **TERZA LEGGE DELLA DINAMICA** detta anche legge di azione e reazione, essa dice che:

Le forze non sono mai eventi singoli, associata ad ogni forza c'è sempre una reazione uguale e contraria. Ecco alcuni esempi molto pratici:

- Quando si è molto arrabbiati si dà un pugno al muro. Però anche la nostra mano ne esce

malconcia a causa del pugno che il muro le restituisce!

- Quando si spara con il fucile c'è il fenomeno del rinculo, il proiettile riceve una spinta (forza) in avanti ed il fucile riceve contemporaneamente una spinta all'indietro.
- L'aeroplano spinge dei gas all'indietro e contemporaneamente questi gas che fuoriescono dalla turbina lo spingono in avanti.
- Si cammina perché la nostra suola della scarpa tira indietro il pavimento e riceve una spinta in avanti.
- Quando si tende una molla da destra verso sinistra la molla tira anche da sinistra verso destra.

## ESEMPIO DINAMICA

Un fucile di 5kg spara un proiettile di 10 grammi alla velocità di 200m/s, calcoliamo la velocità con cui il fucile rincula all'indietro.

\* \* \*

La forza che il fucile esercita sul proiettile ( $\vec{F}_{fu}$ ) è uguale ed opposta a quella ( $\vec{F}_{pr}$ ) che il proiettile esercita sul fucile.

$$\vec{F}_{fu} = -\vec{F}_{pr}$$

moltiplichiamo ambo i membri per il tempo  $\Delta t$  di interazione fra proiettile e fucile (che ovviamente è lo stesso per i due corpi)

$$\vec{F}_{fu} \cdot \Delta t = -\vec{F}_{pr} \cdot \Delta t$$

Ora, essendo  $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$  avremo:

$$m_{fu} \cdot \Delta \vec{v}_{fu} = -m_{pr} \cdot \Delta \vec{v}_{pr}$$

essendo nulle le velocità prima dello sparo, sia del fucile sia del proiettile, si avrà:

$$m_{fu} \cdot \vec{v}_{fu} = -m_{pr} \cdot \vec{v}_{pr}$$

da cui:

$$\vec{v}_{fu} = \frac{m_{pr} \cdot \vec{v}_{pr}}{m_{fu}} = -\frac{0,01 \text{ kg} \cdot 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ kg}} = -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il segno meno sta ad indicare che il verso della velocità è opposto a quello del proiettile, considerato positivo.

## Fisica II

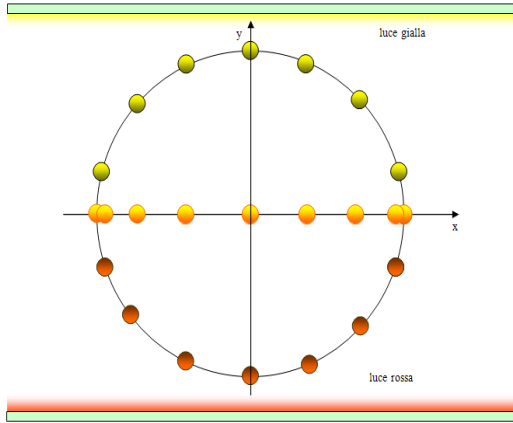
### ESERCIZI DA RISOLVERE DINAMICA

- 1) Una forza di 45N agisce su un corpo di massa 15kg, calcolare l'accelerazione impressa al corpo e la velocità che esso possiede dopo 6 secondi se parte da fermo. [a=3m/s<sup>2</sup>, v=18m/s]
- 2) Due forze ortogonali fra loro: una di 30N e l'altra di 40N agiscono contemporaneamente su un corpo di 20kg. Calcolare l'accelerazione impressa al corpo. [a=2,5m/s<sup>2</sup>]
- 3) Ad un corpo di 0,5kg viene impressa un'accelerazione pari a 10m/s<sup>2</sup>. Qual è l'intensità della forza che agisce su tale corpo? [F=5N]
- 4) Una palla da baseball ha una massa di 0,10kg e un lanciatore riesce ad imprimerle una velocità di 45 m/s, agendo su di essa per un tempo di 0,15 secondi. Qual è la forza applicata dal lanciatore? [F=30N]
- 5) Calcolare la forza parallela al piano inclinato di 30° che agisce su un corpo che scivola e che ha una massa di 16kg. Calcolare anche il tempo impiegato da tale corpo per percorrere il piano inclinato, lungo 5 metri, se parte da fermo e se si trascurano gli attriti. [F<sub>//</sub>=78,4N; t=1,43s]
- 6) Un astronauta di 80kg sulla terra, quanto pesa sulla luna, dove l'accelerazione di gravità è circa un sesto di quella terrestre? Qual è la massa dell'astronauta sulla luna? [F<sub>g</sub>=130,67N]
- 7) Calcolare la forza che si deve applicare parallelamente ad un piano inclinato di 30° per far salire un corpo di 20kg con una accelerazione di 8m/s<sup>2</sup>? [F=258N]
- 8) Quale forza diretta verticalmente verso l'alto si deve applicare ad un corpo di 5kg per farlo salire verticalmente con un'accelerazione di 6m/s<sup>2</sup>? [F=79N]
- 9) Un elettrone (m=9,1\*10<sup>-31</sup>kg) percorre 2cm in linea retta. Sapendo che la velocità iniziale è nulla e che la velocità finale è di 4\*10<sup>6</sup>m/s, determinare la forza che agisce sull'elettrone supponendo che esso si muova di moto uniformemente accelerato. [F=3,64\*10<sup>-16</sup>N]
- 10) Calcolare l'intervallo di tempo necessario per far acquistare la velocità di 36m/s ad un corpo libero di 3kg, inizialmente fermo, agendo su di lui con una forza costante di 9N. [t=12s]
- 11) Ad un corpo libero di 4kg che possiede una velocità di 42m/s, viene applicata una forza costante, contraria, di 10,5N. Dopo quanto tempo si ferma il corpo? [t=16s]
- 12) Un marinaio preme con il suo remo contro uno **zatterone** (vedi prof Tecnologia) galleggiante, parallelamente alla superficie dell'acqua, con una forza costante di 250N per un tempo di 0,5 secondi. Sapendo che la massa dello zatterone è di 1250kg, calcolare la velocità acquistata da tale imbarcazione. [v=0,1m/s]
- 13) Trovare la velocità angolare e la forza centripeta agente su un corpo di 5kg che sta percorrendo un moto circolare uniforme di periodo 0,0314 secondi e un diametro di 1,9 metri. [ω=200s<sup>-1</sup>; F<sub>c</sub>=190000N]
- 14) Un corpo di massa 5kg, libero ed inizialmente fermo, viene sottoposto all'azione di una forza costante di 100 N. Dopo che il corpo ha percorso 90 metri, cessa l'azione della forza ed il corpo si trova costretto a muoversi su una rotaia circolare avente il raggio di 50cm. Trascurando le resistenze passive, calcolare la forza centripeta agente sul corpo e la frequenza del moto rotatorio. [F<sub>c</sub>=36000N; f=19,1Hz]
- 15) Un corpo di massa 6kg scivola lungo un piano orizzontale, spinto da una forza di 42N, anch'essa parallela al piano, se il coefficiente di attrito dinamico è pari a 0,5, quale accelerazione possiede il corpo? [a=2,1m/s<sup>2</sup>]
- 16) Un corpo cubico di massa pari a 20kg è appoggiato su una superficie piana e orizzontale. Si sa che μ<sub>s</sub>=0,4 mentre μ<sub>d</sub>=0,25. Al corpo viene applicata una forza orizzontale di 150N. Calcolare l'accelerazione a cui è sottoposto il corpo alla partenza e negli istanti immediatamente successivi, quando si trova in movimento. [a<sub>i</sub>=3,58m/s<sup>2</sup>; a=5,05m/s<sup>2</sup>]
- 17) L'attrito fra un corpo, avente la massa di 10kg, e il piano su cui appoggia, ha un coefficiente statico pari a 0,6. Calcolare la minima pendenza che deve assumere il piano per far scivolare il corpo. [α=36°58']
- 18) Un corpo è trainato da una forza di 60N e, in presenza di un coefficiente di attrito dinamico pari a 0,3, ha una accelerazione di 6m/s<sup>2</sup>. Quanto vale la massa del corpo? [m=6,67kg]
- 19) Un corpo avente la massa di 50kg è trainato da una forza di 200N, ma il suo moto è rettilineo ed uniforme! Perché?

## APPROFONDIMENTI DI DINAMICA

### MOTO ARMONICO

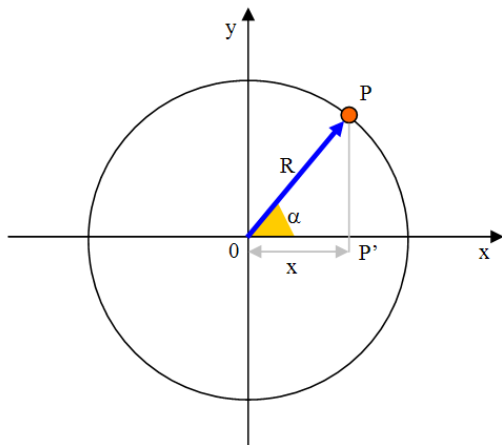
Osserviamo la proiezione sull'asse x del moto di un punto mobile **P**, che ruota con moto circolare uniforme, su una circonferenza di raggio **R** centrata nell'origine degli assi cartesiani.



Lungo l'asse x il punto P oscilla avanti e indietro: inverte il senso di marcia, aumenta la velocità, raggiunge una velocità massima (in corrispondenza dell'origine), rallenta, si ferma e inverte di nuovo il senso di marcia per ricominciare ...

#### Posizione x

La posizione x del punto P' (sull'asse x) è data, istante per istante, dalla proiezione del raggio OP sull'asse x.



La trigonometria ci insegna che:

$$\vec{x} = |\vec{R}| \cdot \cos \alpha \quad \text{ARM, 1}$$

quindi, se si conosce la velocità angolare  $\omega$  del moto circolare uniforme, essendo:

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

si ha:

$$\Delta \alpha = \omega \cdot \Delta t$$

quindi, se l'angolo iniziale  $\alpha$  è uguale a zero ed anche il tempo iniziale è nullo ( $t = 0$ ), si ha:

$$\alpha = \omega \cdot \Delta t$$

Pertanto la ARM, 1 può essere scritta così:

$$\vec{x} = |\vec{R}| \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) \quad \text{ARM, 2}$$

#### Velocità v

La velocità di P è massima quando  $x=0$  ed è invece nulla quando  $x=R$  e quando  $x=-R$ , per le altre posizioni vale:

$$\vec{v} = -\omega |\vec{R}| \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) \quad \text{ARM, 3}$$

#### Accelerazione a

L'accelerazione a cui è sottoposto il punto P è sempre opposta alla posizione (se x è positiva, allora a è negativa e viceversa). Essa è massima negativa per  $x=R$ , è nulla per  $x=0$  ed è invece massima positiva per  $x=-R$ , per tutte le altre posizioni vale:

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot |\vec{R}| \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) \quad \text{ARM, 4}$$

#### Moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica

La forza che esercita una molla su un oggetto è proporzionale alla deformazione della molla (Legge di Hooke).

Per il 2° principio della dinamica, abbiamo pertanto:

$$m \cdot \vec{a} = -k \cdot \Delta \vec{x} \quad \text{ARM, 5}$$

dove, ricordo,  $\Delta x$  è la deformazione lineare della molla, cioè lo spostamento del corpo di massa **m** dalla posizione di equilibrio del **moto armonico** che esso compie a causa della molla.

Ricordo che il segno meno è dato dal fatto che la deformazione della molla ha sempre verso contrario alla forza esercitata dalla molla: se la molla viene allungata, essa tende a contrarsi, se la molla viene schiacciata, essa tende ad allungarsi.

Abbiamo:

$$\vec{a} = -\frac{k}{m} \cdot \Delta \vec{x} \quad \text{ARM, 6}$$

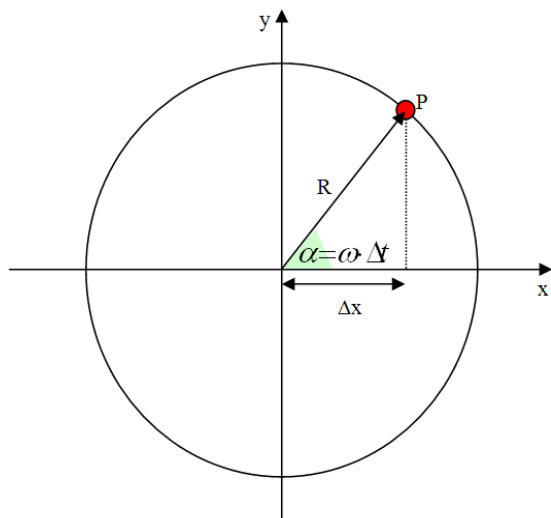
da cui vediamo che l'accelerazione del corpo è proporzionale a  $\Delta x$ , però con verso contrario:

- è **massima** all'estremità dell'oscillazione
- è **nulla** al centro delle oscillazioni, cioè nella posizione di equilibrio.

# Fisica II

Nell'introduzione del moto armonico, abbiamo visto che  $\vec{a} = -\omega^2 \cdot |\vec{R}| \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t)$  quindi, considerando che

$$\Delta \vec{x} = |\vec{R}| \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) \quad \text{ARM, 7}$$



abbiamo:

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \Delta \vec{x} \quad \text{ARM, 8}$$

mettendo assieme la ARM, 6 con la ARM, 8 otteniamo:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ARM, 9}$$

La ARM, 9 dà la **pulsazione del moto armonico**, mentre, dividendo per  $2\pi$  otteniamo la **frequenza del moto armonico**:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ARM, 10}$$

facendo il reciproco della ARM, 10 si ottiene il **periodo dell'oscillazione** della molla, cioè il tempo che intercorre fra due identiche situazioni di deformazione della molla:

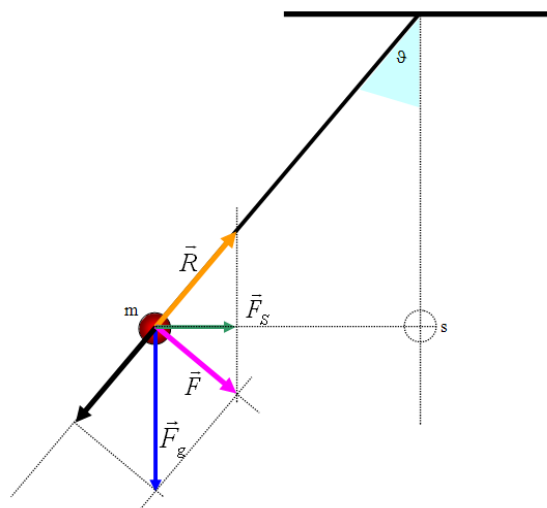
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{ARM, 11}$$

## Moto del pendolo semplice

Il pendolo semplice è costituito da una massa  $m$  appesa ad un filo di lunghezza  $l$ .

Sulla massa  $m$  agiscono solamente la **forza peso** ( $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$ ) e la **reazione del filo**  $\vec{R}$ .

La figura mostra la situazione delle forze con un certo angolo  $\theta$  di spostamento del pendolo dalla posizione di equilibrio.



Osserviamo che:

$$\vec{F}_g + \vec{R} = \vec{F}$$

da cui:

$$\vec{F}_g + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

ora, per piccole oscillazioni, cioè per piccoli angoli  $\theta$ , abbiamo che  $\vec{F}$  è circa uguale a  $\vec{F}_s$ , cioè la proiezione della forza che fa oscillare il pendolo sulla direzione dell'orizzontale.

L'accelerazione lungo tale direzione è pertanto:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_s}{m} = \frac{\vec{F}_g \cdot \sin \theta}{m} = \frac{m \cdot \vec{g} \cdot \sin \theta}{m} = \vec{g} \cdot \sin \theta \quad \text{ARM, 12}$$

oppure, che è lo stesso:

$$\vec{a}_s = \vec{g} \cdot \frac{s}{l} \quad \text{ARM, 13}$$

Osserviamo che l'accelerazione del pendolo è, in prima approssimazione, proporzionale allo spostamento  $s$  dalla posizione d'equilibrio.

Anche in questo caso, per il pendolo possiamo scrivere le relazioni per la **pulsazione  $\omega$** , per la **frequenza  $f$**  e per il **periodo  $T$** . Come nel caso precedente, dal confronto fra la ARM, 13 e la ARM, 8, abbiamo  $\omega^2 = \frac{\vec{g}}{l}$ , pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{ARM, 14}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{ARM, 15}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
 ARM,16

Per quanto riguarda il pendolo semplice possiamo pertanto affermare che:

- **c'è isocronismo nelle oscillazioni**, cioè le oscillazioni durano sempre lo stesso tempo, sia che siano molto piccole, che abbiano una certa ampiezza, non troppo grande, altrimenti non vale più l'approssimazione fatta nel corso del conto.
- **Il periodo T delle oscillazioni è indipendente dalla massa m del pendolo**
- **Il periodo di oscillazione dipende solo dalla lunghezza l del filo.**

## SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI

Si potrà giocare regolarmente una partita da ping pong a bordo di un aereo che sta procedendo alla velocità costante di 900 km/h?

Evidentemente sì, come possiamo, sugli aeroplani, sorseggiare indisturbati una tazza di tè o addirittura giocare con gli Shanghai.

In quali occasioni invece sull'aereo non possiamo fare tutto ciò, e addirittura siamo costretti ad allacciare la cintura di sicurezza?

- Quando l'aereo decolla?
- Quando vira?
- Quando è in fase di atterraggio?
- Quando c'è maltempo?

cioè in tutte quelle occasioni in cui il **vettore velocità** non è costante nel tempo, cioè si è in presenza di **accelerazioni**.

Dicesi **sistema di riferimento inerziale** un sistema nel quale valgono le tre leggi della dinamica, così come le abbiamo appena imparate, laddove cioè un corpo si sposta di moto accelerato solo in presenza di forze.

L'aereo in moto rettilineo ed uniforme può dunque essere considerato un **sistema inerziale**, su di esso infatti i comportamenti dei vari oggetti sono gli stessi del caso in cui l'aereo è fermo sulla pista. Pensiamo invece al momento del decollo, o di essere in auto in fase di accelerazione, ci sentiamo schiacciati contro il sedile e ci sentiamo invece portare in avanti in caso di frenata, sballottati a destra e a sinistra nelle virate.

A quali forze siamo soggetti in queste situazioni? Chi le produce?

In realtà nessuno produce tali forze, addirittura esse **non esistono**, è solamente l'inerzia, dovuta alla nostra massa, che si oppone al cambiamento delle condizioni di moto.

In questi casi l'aereo, o l'auto, **non sono sistemi inerziali**, su di essi dobbiamo *inventarci delle forze* per spiegare quelle misteriose accelerazioni a cui siamo sottoposti, assieme a tutti gli oggetti liberi di muoversi. Queste strane forze si dicono **forze fittizie**.

Anche la famosa **forza centrifuga** è una forza fittizia, non esiste infatti nulla che scaccia dal centro gli oggetti.

Pensiamo, ad esempio, all'acqua che esce **tangenzialmente** dai fori del cestello della lavatrice durante la fase che appunto si chiama **centrifuga**. Se non ci fossero i fori, l'acqua sarebbe trattenuta dalla forza centripeta impressa dalla parete metallica rotante; dove c'è il foro, non c'è metallo, non c'è forza centripeta e quindi l'acqua, non essendo sottoposta a forze, (prima legge della dinamica) esce con moto rettilineo ed uniforme.

Sulla Terra, viviamo in un sistema inerziale?

Teoricamente no! Infatti la Terra gira su se stessa e attorno al Sole, compie cioè una serie di moti circolari e pertanto lei stessa e chi ci vive è sottoposto ad accelerazioni. Le traiettorie di questi moti accelerati sono però così larghe e relativamente lente, viste le dimensioni, che possono, da noi così piccoli, essere considerate "abbastanza rettilinee".

Sulla Terra stessa, come abbiamo visto, possiamo poi trovare sistemi **inerziali** o **non inerziali**, a seconda che questi si muovano di moto rettilineo ed uniforme oppure accelerato, rispetto alla Terra stessa.

## LAVORO ED ENERGIA

Nel capitolo precedente, quello dedicato alle leggi della dinamica, abbiamo incontrato la grandezza fisica denominata **impulso**; essa è data dal prodotto della **forza F** per il **tempo  $\Delta t$**  di applicazione di tale forza ad un dato corpo. Abbiamo anche visto che tale impulso provoca una **variazione della quantità di moto p** del corpo stesso.

Una delle espressioni del teorema dell'impulso era la DIN, 5:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$

che può anche essere scritta così:

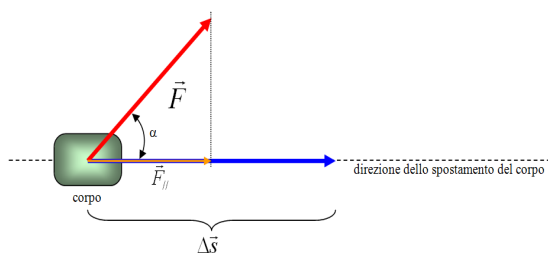
$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i$$

Osserviamo come l'impulso sia un vettore ottenuto dal prodotto di un vettore (la forza) per uno scalare (il tempo). La variazione del vettore quantità di moto è positiva se l'impulso è positivo, cioè concorde con il verso della velocità iniziale del corpo prima dell'intervento della forza; al contrario è negativa se l'impulso è negativo.

Ora, moltiplichiamo il vettore forza per un altro vettore: lo spostamento  $\Delta s$  che subisce il corpo durante l'azione della forza. Questo prodotto di due vettori dà come risultato una grandezza fisica che si chiama **LAVORO (L)** che non è un vettore, bensì uno scalare.

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \quad \text{ENE, 1}$$

È un prodotto scalare. Il modulo, cioè il valore numerico del lavoro si ottiene moltiplicando lo spostamento  $\Delta \vec{s}$ , effettuato dal corpo da quando è iniziata l'azione della forza, per la componente della forza F parallela a tale spostamento.



$$L = F_{||} \cdot \Delta s$$

oppure:

$$L = |\vec{F}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \Delta s \quad \text{ENE, 2}$$

# Fisica II

L'unità di misura di questa nuova grandezza fisica (il lavoro) la scopriamo in questo esempio:

*Calcoliamo il lavoro che esegue una forza di 40N che agisce su un corpo per un tratto di 6 metri, supponendo che le direzioni ed i versi dei due vettori siano le stesse e cioè che l'angolo  $\alpha$  sia nullo.*

Se  $\alpha=0$  si ha  $\cos\alpha=1$  quindi basta scrivere:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = 40\text{N} \cdot 6\text{m} = 240\text{N} \cdot \text{m} = 240\text{Joule} = 240\text{J}$$

Il lavoro si misura in Joule, nel S. I.

Altro esempio.

*Calcoliamo il lavoro che esegue la stessa forza di prima di 40N quando agisce su un corpo, sempre per un tratto di 6m, ma in questo caso con la direzione del vettore forza che forma un angolo  $\alpha$  di 35° con quella dello spostamento del corpo.*

In questo caso abbiamo:

$$L = |\vec{F}| \cdot \Delta \vec{s} \cdot \cos\alpha = 40\text{ N} \cdot 6\text{m} \cdot \cos 35^\circ \approx 195,6\text{ J}$$

Questo lavoro è minore del precedente!

Se le due direzioni: quella dello spostamento e quella della forza sono ortogonali ( $\alpha=90^\circ$ ), allora il lavoro è nullo ( $L=0$ ), in quanto  $\cos 90^\circ=0$ .

Se l'angolo  $\alpha$  è superiore a  $90^\circ$  il valore del coseno è negativo, quindi anche il lavoro risulta essere negativo. Ecco un esempio:

*Con la stessa forza e lo stesso spostamento dei due esempi precedenti, calcoliamo ora il lavoro nel caso in cui l'angolo  $\alpha$  sia pari a  $120^\circ$ .*

Abbiamo:

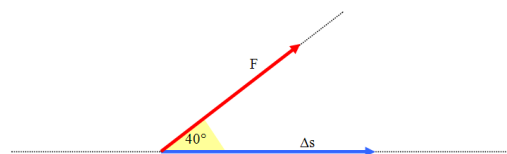
$$L = |\vec{F}| \cdot \Delta \vec{s} \cdot \cos\alpha = 40\text{ N} \cdot 6\text{m} \cdot \cos 120^\circ = -120\text{ J}$$

Ed ora vediamo altri esempi:

- 1] Stessa forza e stesso spostamento dell'esercizio precedente, con la differenza che ora le due direzioni formano fra loro un angolo di  $40^\circ$ . Calcoliamo ancora il lavoro!

\* \* \*

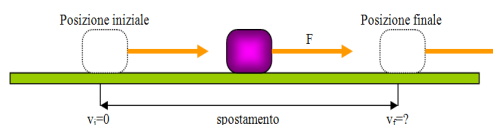
Ora applichiamo la ENE, 1 completa:



$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = F \cdot \Delta \vec{s} \cdot \cos\alpha = 80\text{N} \cdot 6\text{m} \cdot \cos 40^\circ = 367,7\text{ N}$$

- 2] Una forza di 120N agisce per 4 secondi su un corpo di 30kg, inizialmente fermo, su una direzione parallela allo spostamento del corpo stesso. Calcoliamo il lavoro eseguito da tale forza.

\* \* \*



I dati del problema non forniscono direttamente lo spostamento, ma con essi possiamo calcolarlo.

Calcoliamo l'accelerazione

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{120\text{ N}}{30\text{ kg}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

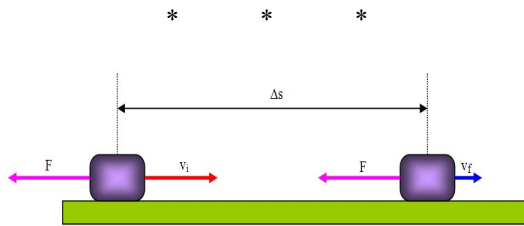
Applichiamo la legge oraria con  $v_i=0$ :

$$\Delta \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16\text{ s}^2 = 32\text{ m}$$

E ora possiamo calcolare il lavoro, considerando che  $\alpha=0$ :

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = 120\text{N} \cdot 32\text{m} = 3840\text{J}$$

- 3] Un corpo di **50kg** procede lungo una direzione alla velocità di **20m/s**. Calcoliamo il lavoro che deve fare una forza contraria di **300N** per rallentare il corpo fino alla velocità di **8m/s**.



Possiamo notare dal testo, come il corpo proceda sempre nello stesso verso con la forza che agisce in modo contrario, da considerare, pertanto, negativa.

Per calcolare il tratto di strada (spostamento) nel quale agisce la forza, calcoliamo prima l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-300 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

poi l'intervallo di tempo necessario per avere il calo di velocità richiesto:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \vec{v}}{\vec{a}} = \frac{-12 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \text{ s}$$

e quindi, usando la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (\Delta t)^2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\text{s}^2 = 28 \text{ m}$$

E quindi:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = -300\text{N} \cdot 28\text{m} = -8400\text{J}$$

## POTENZA

La grandezza fisica denominata **potenza (P) media** è, per definizione, il lavoro compiuto nell'unità di tempo (che nel S.I. è il secondo), quindi:

$$P = \frac{L}{\Delta t} \quad \text{ENE, 3}$$

L'unità di misura è:

$$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{Watt} = \text{W}$$

Calcoliamo la potenza espressa dalla forza **F** nell'esercizio 3 studiato in precedenza.

\* \* \*

Applichiamo la ENE, 3, considerando positivo il lavoro, in quanto la potenza è da considerarsi sempre positiva!

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{8400 \text{ J}}{2 \text{ s}} = 4200 \text{ W}$$

Di potenza torneremo a parlare dopo il paragrafo successivo, così potremo capire meglio il suo significato, anche quando è riferito a motori da competizione.

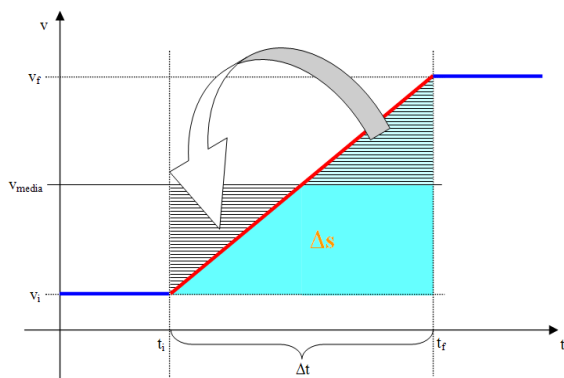
## TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Cominciamo a parlare sul serio di energia; cercheremo di dire cos'è l'energia e vedremo come non sia semplice darne una definizione rigorosa.

Per ora diciamo che ci sono essenzialmente due tipi di energia: quella **cinetica** dovuta al movimento e quella **potenziale** dovuta alla posizione dei corpi. Parleremo più avanti di altre cose interessanti, dopo aver definito alcune forme particolari di energia.

Consideriamo un corpo di massa **m** che procede con velocità costante  $\vec{v}_i$  con moto rettilineo ed uniforme. Supponiamo che ad un certo istante intervenga una forza  $\vec{F}$  con direzione e verso identici a quelli della velocità, che accelera il corpo. Pensiamo che la forza agisca per un tratto di strada  $\Delta \vec{s}$  e che riesca ad aumentare la velocità del corpo fino al valore  $\vec{v}_f$ , impiegando un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ .

La seguente figura mostra il grafico della velocità in funzione del tempo e l'area del trapezio che rappresenta lo spazio percorso dal corpo durante l'azione della forza.



Partiamo dalla definizione di lavoro che esegue la forza  $\vec{F}$  sul corpo per il tratto  $\Delta \vec{s}$  :

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Ora, al posto di F sostituiamo il prodotto della massa per l'accelerazione, cioè la seconda legge della dinamica:

$$L = m \cdot \vec{a} \cdot \Delta \vec{s}$$

Adesso sostituiamo la definizione di accelerazione  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  ed il valore di  $\Delta \vec{s}$ , che come mostra la figura, può essere dato dall'area del rettangolo con base  $\Delta t$  ed altezza  $v_{media}$  che è la stessa di quella del trapezoido rettangolo di color azzurrino, che come sappiamo rappresenta lo spazio percorso  $\Delta \vec{s}$  dal corpo durante la fase di accelerazione.

$$L = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \vec{v}_{media} \cdot \Delta t$$

$\Delta t$  si semplifica, quindi:

$$L = m \cdot \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}_{media}$$

Ora,  $\Delta \vec{v}$  è dato da  $\vec{v}_f - \vec{v}_i$ , mentre, in questo caso, essendoci una variazione lineare di velocità, la velocità media sarà data proprio dalla media aritmetica fra  $\vec{v}_f$  e  $\vec{v}_i$ .

$$L = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \cdot \frac{\vec{v}_f + \vec{v}_i}{2}$$

che possiamo scrivere così:

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_f + \vec{v}_i)$$

e adesso, proprio per far vedere che la matematica serve, ci ricordiamo che essa ci insegna i prodotti notevoli ed in particolare che differenza per somma di due monomi è pari alla differenza dei due quadrati, quindi:

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

da cui, moltiplicando:

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 \quad \text{ENE, 4}$$

il prodotto della semimassa per il quadrato della velocità si chiama **energia cinetica** ( $E_c$ ), quindi abbiamo:

$$L = E_{cf} - E_{ci}$$

Abbiamo scritto il lavoro come differenza di due termini e questi termini rappresentano una grandezza fisica denominata appunto energia cinetica ( $E_c$ ), essa dipende dalla velocità e dalla massa del corpo che la possiede.

Facciamo alcuni esempi:

- Calcoliamo l'energia cinetica di un corpo di massa  $m=80\text{kg}$  con una velocità di  $14\text{m/s}$ .

\* \* \*

*Sappiamo che l'energia cinetica è per definizione il prodotto della semimassa per il quadrato della velocità:*

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot 196 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 7840 \text{ J}$$

- Un corpo di  $30\text{kg}$  viene spinto da una forza costante nella direzione e verso del suo moto in modo che la velocità passi da  $5 \text{ m/s}$  a  $13\text{m/s}$ . Calcoliamo il lavoro eseguito dalla forza.

\* \* \*



Non conosciamo, in questo caso, né la forza, né lo spostamento, eppure possiamo calcolare il lavoro lo stesso, applicando il *teorema dell'energia cinetica*, cioè calcolando la differenza fra le energie cinetiche: finale ed iniziale.

## Fisica II

$$L = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

$$L = 15 \text{ kg} \cdot \left( 169 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) = 15 \text{ kg} \cdot 144 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2160 \text{ J}$$

- Riferendoci all'esercizio precedente, calcoliamo il valore della forza che ha provocato quell'aumento di velocità al corpo, sapendo che l'operazione ha richiesto uno spazio di **8 metri**.

\* \* \*

*La forza si ottiene applicando la formula inversa di quella del lavoro:*

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \Rightarrow \vec{F} = \frac{L}{\Delta \vec{s}} = \frac{2160 \text{ J}}{8 \text{ m}} = 270 \text{ N}$$

Calcoliamo anche il tempo impiegato da questa forza per eseguire l'operazione descritta, applicando il teorema dell'impulso:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \Rightarrow \Delta t = \frac{m \cdot \Delta \vec{v}}{\vec{F}} = \frac{30 \text{ kg} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{270 \text{ N}} \approx 0,89 \text{ s}$$

- Riferendoci ancora all'esercizio precedente, calcoliamo il valore della forza che ha provocato quell'aumento di velocità al corpo, sapendo che l'operazione ha richiesto un tempo di **8 secondi**.

\* \* \*

*Attenzione, ora abbiamo il tempo, non abbiamo lo spazio percorso dal corpo durante l'azione della forza!*

Possiamo calcolare questo spazio percorso applicando la legge oraria:

$$\Delta \vec{s} = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \Delta t^2 = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{\Delta t} \cdot \Delta t^2 = \vec{v}_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \cdot \Delta t$$

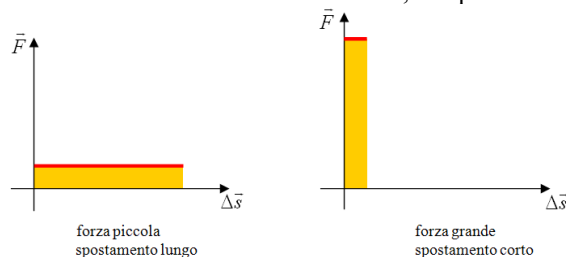
$$\Delta \vec{s} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left( 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 8 \text{ s} = 40 \text{ m} + 32 \text{ m} = 72 \text{ m}$$

Adesso possiamo trovare la forza:

$$\vec{F} = \frac{L}{\Delta \vec{s}} = \frac{2160 \text{ J}}{72 \text{ m}} = 30 \text{ N}$$

*Possiamo notare come in questo caso, la forza sia "piccola" (30N) e impieghi un tempo "grande" (8s) e debba spingere per più metri (72m) per portare quel corpo di 30kg dalla velocità di 5m/s a quella di 13m/s; mentre in un esercizio precedente, la forza più grande di 270N riesca a provocare la stessa variazione di velocità allo stesso corpo in meno tempo (0,89s) e in meno spazio (8m).*

Il lavoro è lo stesso nei due casi, sempre 2160J.



Le aree dei due rettangoli sono le stesse!

- Un corpo di massa **50kg** procede alla velocità di **12m/s** e, per un tratto di strada lungo **6 metri** subisce una forza contraria di **200N**. Calcoliamo la velocità finale di quel corpo.

\* \* \*

*Usiamo il teorema dell'energia cinetica:*

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 + L$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ kg} \cdot \left( 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + (-200 \text{ N} \cdot 6 \text{ m})$$

*Notare come il valore della forza sia negativo, (forza contraria).*

$$\frac{1}{2} m \cdot v_f^2 = 3600 \text{ J} - 1200 \text{ J} = 2400 \text{ J}$$

*quindi:*

$$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 2400 \text{ J}}{50 \text{ kg}}} = \sqrt{96 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*Torniamo a parlare di potenza, come promesso nel paragrafo precedente.*

- Calcoliamo la potenza sviluppata da una vettura con una massa di 500kg, quando passa in 3,2 secondi, da ferma, alla velocità di 108km/h, cioè di 30m/s.

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot 500 \text{ kg} \cdot 900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 0 = 225000 \text{ J}$$

*Questo lavoro viene svolto in 3,2 secondi, quindi con una potenza media di:*

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{225000 \text{ J}}{3,2 \text{ s}} = 70312,5 \text{ Watt} \approx 70,3 \text{ kW}$$

*che corrispondono a circa 95 cavalli.*

Naturalmente molto lavoro viene sprecato negli attriti, questa che abbiamo ottenuto sarebbe la potenza ideale. Quella reale, per raggiungere lo stesso risultato, dovrà essere molto superiore.

Nel prossimo paragrafo capiremo la conversione fra kW e cavalli di potenza.

## ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

L'energia cinetica si "vede", è chiara, c'è movimento. Talvolta invece, l'energia è "nascosta" o "immagazzinata", anche se in ogni momento può essere utilizzata e trasformata in energia cinetica, cioè resa visibile.

Tutte le volte che l'energia ha queste caratteristiche si dice che è **potenziale**, con lo stesso significato che questa parola ha nella lingua italiana.

Cominciamo con lo studio dell'energia potenziale gravitazionale, scrivendo il lavoro **L** che deve compiere una forza **F** per portare un corpo di massa **m** da un'altezza iniziale **h<sub>i</sub>** ad un'altezza finale **h<sub>f</sub>**, sulla superficie terrestre.

(Ricordo, che anche prima, quando è stata introdotta l'energia cinetica, si è partiti dalla definizione di lavoro e cioè forza per spostamento.

Affinché il corpo salga a velocità costante, sarà sufficiente applicargli una forza uguale e contraria alla sua forza peso per tutto lo spostamento, da  $\vec{h}_i$  ad  $\vec{h}_f$ ; in questo si applica la minima forza possibile per raggiungere il risultato desiderato.

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

$$L = m \cdot \vec{g} \cdot (\vec{h}_f - \vec{h}_i)$$

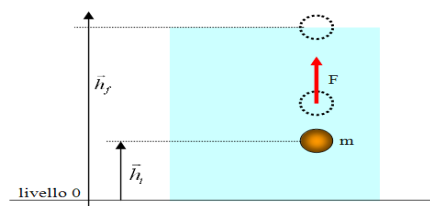
$$L = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_f - m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_i \quad \text{ENE, 5}$$

Chiamiamo **energia potenziale (U)** il monomio **m g h**, così possiamo scrivere:

$$L = U_f - U_i$$

Possiamo notare come tale energia dipenda: dalla massa, dall'**accelerazione di gravità** e dall'**altezza**.

Attenzione! Non c'è sulla superficie terrestre un livello 0 dove si ha per un dato corpo  $U=0$ , in quanto si può sempre scavare una buca nelle vicinanze, rispetto al fondo della quale il corpo possiede una certa energia potenziale gravitazionale. Volta per volta lo zero dell'energia potenziale gravitazionale viene scelto in base al problema da risolvere; di solito esso viene individuato nel punto più basso.



# Fisica II

Vediamo alcuni esempi:

- Calcoliamo l'energia potenziale gravitazionale, rispetto al suolo, di un corpo di **40kg** posto a **70 metri** d'altezza.

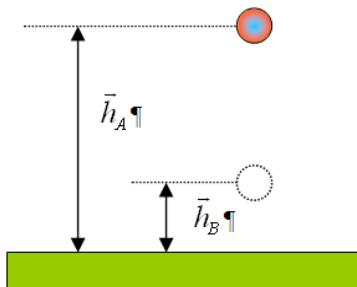
\* \* \*

Applichiamo la  $U = m g h$ :

$$U = 40 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 70 \text{ m} = 27440 \text{ J}$$

- Calcoliamo il lavoro necessario per portare una massa di **30kg** da un'altezza di **20m** ad un'altezza di **60m**.

\* \* \*



Applichiamo la ENE, 4 che esprime il lavoro come differenza fra i due livelli energetici:

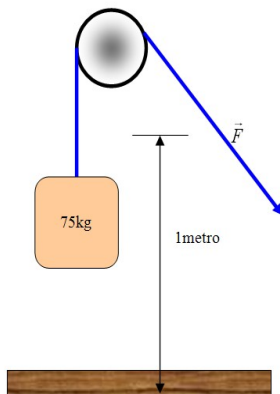
$$L = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_A - m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_B = m \cdot \vec{g} \cdot (\vec{h}_A - \vec{h}_B)$$

$$30 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (60 \text{ m} - 20 \text{ m}) = 11760 \text{ J}$$

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di potenza espressa in **cavalli**.

Vediamo come è definito il **cavallo vapore**.

Si ha la potenza di **1CV** quando si è in grado di alzare di **1metro** una massa di **75kg** in **1secondo**.



Vediamo a quanti **Watt** corrisponde **1CV**.

**75kg** ad un metro d'altezza hanno un'energia potenziale

$$U = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h} = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} \approx 735,5 \text{ J}$$

quindi se tale lavoro viene eseguito in un secondo, si ha la potenza di **735,5W**.

**1CV** corrisponde a **735,5W**

Vediamo alcuni esempi.

- Calcoliamo l'energia potenziale gravitazionale, rispetto al suolo, di un corpo di **40 kg** posto a **70 metri** d'altezza.

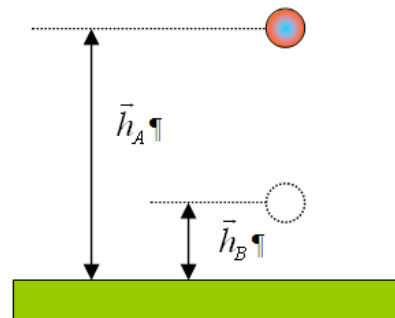
\* \* \*

Applichiamo la  $U = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}$  :

$$U = 40 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 70 \text{ m} = 27440 \text{ J}$$

- Calcoliamo il lavoro necessario per portare una massa di **30kg** da un'altezza di **20 m** ad un'altezza di **60m**.

\* \* \*



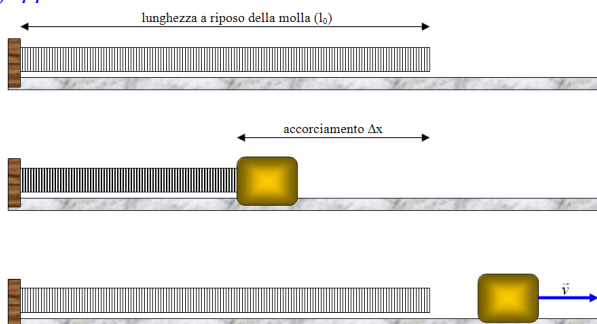
Applichiamo la ENE, 4 che esprime il lavoro come differenza fra i due livelli energetici:

$$L = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_A - m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h}_B = m \cdot \vec{g} \cdot (\vec{h}_A - \vec{h}_B)$$

$$30 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (60 \text{ m} - 20 \text{ m}) = 11760 \text{ J}$$

## ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Sappiamo che se comprimiamo una molla e, in corrispondenza di un suo estremo, poniamo una massa  $m$  (come in figura), siamo in grado di far scattare via la massa con una certa velocità  $v$ , come avviene nel flipper.



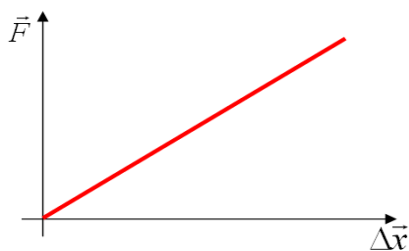
Anche in questo caso c'è prima una forma di **energia potenziale** (celata, immagazzinata) che successivamente si trasforma in energia cinetica.

Calcoliamo il lavoro di compressione della molla, come prodotto della forza  $F$  che dobbiamo esercitare sulla molla per la sua deformazione  $\Delta x$ .

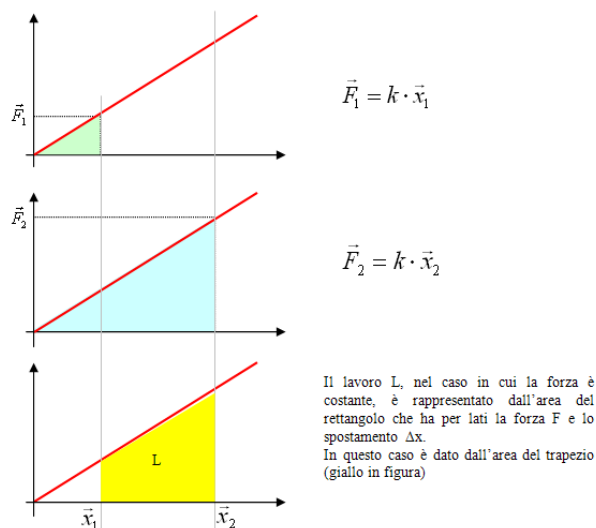
$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

La legge di Hooke ci dice che la forza che noi dobbiamo esercitare sulla molla per ottenere la sua deformazione è proporzionale alla deformazione stessa, quindi la forza non è costante durante lo spostamento.

$$\vec{F} = k \cdot \Delta \vec{x}$$



Consideriamo due diverse lunghezze della molla (entrambe minori di quella a riposo):  $x_1$  ed  $x_2$ . E calcoliamo il lavoro per far passare la molla dalla maggiore ( $x_1$ , minor deformazione) alla minore ( $x_2$ , maggior deformazione). Sia  $x_0$  la lunghezza a riposo della molla.



$$L = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{B}) \cdot \vec{h}$$

$$L = \frac{1}{2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

$$L = \frac{1}{2} (k \cdot \vec{x}_1 + k \cdot \vec{x}_2) \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

$$L = \frac{1}{2} k \cdot (\vec{x}_2 + \vec{x}_1) \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

$$L = \frac{1}{2} k \cdot (x_2^2 - x_1^2)$$

$$L = \frac{1}{2} k \cdot (x_2)^2 - \frac{1}{2} k \cdot (x_1)^2 \quad \text{ENE, 6}$$

Ricordo che  $x_1$  ed  $x_2$  sono le due deformazioni della molla (iniziale e finale).

Per la terza volta abbiamo ottenuto il lavoro come differenza di due termini, e ancora una volta questi termini sono delle "energie". Queste energie si chiamano: **energia potenziale elastica**.

Quando una molla di costante elastica  $k$  è schiacciata o allungata di una quantità  $\Delta x$ , essa possiede una energia potenziale elastica pari a:

$$E_{el} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta x)^2 \quad \text{ENE, 7}$$

- Calcoliamo l'energia potenziale elastica di una molla avente costante elastica  $k=8000\text{N/m}$ , compressa di  $12\text{cm}$ .

\* \* \*

Applichiamo la ENE, 6:



$$U_{el} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \cdot 8000 \frac{N}{m} \cdot (0,12 m)^2 = 4000 \frac{N}{m} \cdot 0,0144 m^2 = 57,6 J$$

URTI

## CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Studiando il capitolo sulle leggi della dinamica, dopo la DIN, 1 ( $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ), abbiamo incontrato la DIN, 6 da cui:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Questo modo di esprimere la seconda legge di Newton evidenzia il fatto che una forza  $F$  applicata dall'esterno ad un corpo (o ad un sistema di corpi) per un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ , provoca una variazione della quantità di moto del corpo stesso.

Ne consegue, che *se non ci sono forze applicate dall'esterno*, allora *la quantità di moto* del corpo (o del sistema di corpi) *rimane invariata*, cioè resta costante nel tempo.

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 0$$

Non si ha variazione di quantità di moto anche nel caso in cui sono presenti delle forze interne al sistema. Se consideriamo un sistema composto da due corpi che interagiscono fra di loro, e le uniche forze presenti siano quelle che si esercitano scambievolmente i due corpi, avremo che la variazione di quantità di moto che subisce il corpo 1 è compensata dalla variazione opposta di quantità di moto che subisce il corpo 2.

Come esempio consideriamo due masse:  $m_1=4\text{kg}$  ed  $m_2=10\text{kg}$  che procedono unite (tramite una molla) alla **velocità di 3m/s**; in modo che l'intero sistema abbia una quantità di moto pari a  $42 \text{ kg} \frac{m}{s}$  (vedi figura).



Supponiamo che quando la molla esplode (*la molla fa parte del sistema, quindi la forza che la molla esercita sulle due masse è interna al sistema*), sia in grado di invertire la velocità della  $m_1$  fino a portarla a  $-3\text{m/s}$ , cioè provochi una variazione di velocità di  $-6\text{m/s}$  con una conseguente variazione di quantità di moto pari a  $-24\text{kg m/s}$ . Di conseguenza la  $m_2$  avrà una variazione positiva di  $24\text{kg m/s}$  e la sua nuova velocità sarà di  $6,4\text{m/s}$ .

È questo fatto che spiega il rinculo del fucile, prima dello sparo la quantità di moto del sistema **fucile+proiettile** è nulla, e così deve rimanere anche dopo lo sparo. Dopo la partenza del proiettile, però, la quantità di moto non è più zero per il fatto che le velocità sono nulle, ma per il fatto che le due quantità di moto, del fucile  $Q_f$  e del proiettile  $Q_p$  hanno la stessa direzione, ma sono uguali in modulo e opposte in verso:

$$m_{\text{proiettile}} \cdot \vec{v}_{\text{proiettile}} = -M_{\text{fucile}} \cdot \vec{v}_{\text{fucile}} \quad \text{URTI, 1}$$

Chiaramente, il fucile, che ha una massa molto più consistente di quella del proiettile, si muoverà *all'indietro* con velocità molto inferiore di quella *in avanti* del proiettile. Altrimenti sarebbero guai!

La conservazione della quantità di moto è anche il fenomeno che permette il funzionamento degli aerei a reazione, dal motore vengono espulsi, all'indietro dei gas ad altissima velocità, così l'aereo, per far sì che la quantità di moto si conservi, sarà costretto a procedere in avanti, in modo da avere:

$$m_{\text{gas}} \cdot \vec{v}_{\text{gas}} = -M_{\text{aereo}} \cdot \vec{v}_{\text{aereo}} \quad \text{URTI, 2}$$

In generale, quando la quantità di moto è diversa da zero anche prima dell'*esplosione*, nel caso dell'urto di due corpi, rispettivamente di massa  $m_1$  e  $m_2$ , avremo:

$$Q_{\text{PRIMA}} = Q_{\text{DOPO}}$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' \quad \text{URTI, 3}$$

da cui:

$$m_1 \cdot (\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = -m_2 \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$$

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2 \quad \text{URTI, 4}$$

Questo risultato denota che la variazione della quantità di moto di un corpo, in un urto (interazione) è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto dell'altro corpo.

Riassumendo, possiamo scrivere:

- **un urto produce uno scambio di quantità di moto,**
- **le variazioni delle velocità dei due corpi che interagiscono sono inversamente proporzionali alle masse.**

Osserviamo che, se dividiamo entrambi i membri dell'equazione URTI, 4 per l'intervallo di tempo  $\Delta t$  durante il quale avviene l'interazione, cioè l'urto, otteniamo:

$$m_1 \cdot \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

cioè:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = -m_2 \cdot \vec{a}_2$$

e quindi:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \text{URTI,5}$$

dove  $\vec{F}_1$  è la forza che il **corpo 2** imprime al **corpo 1**, mentre  $\vec{F}_2$  è la forza che il **corpo 1** imprime al **corpo 2**.

Possiamo esprimere così il risultato URTI,5:

**Quando due corpi interagiscono, la forza agente su un corpo è uguale ed opposta alla forza agente sull'altro.**

Abbiamo cioè ottenuto la **legge di azione e reazione**, o terza legge della dinamica, che già avevamo enunciato studiando le leggi della dinamica.

## STUDIO DEGLI URTI

Lo studio degli **urti** fra le particelle è molto importante, in fisica, nei gas le particelle si urtano fra di loro, le particelle sub nucleari urtandosi si *rompono* e si scompongono in altre particelle, ma anche a livello macroscopico lo studio degli urti aiuta i periti nell'analisi degli incidenti stradali e permette il raggiungimento di elevati livelli di abilità nel giuoco del biliardo.

Distingueremo fra **urti elastici** e **urti anelastici** e fra **urti centrali** e **urti non centrali**.

### ➤ URTO ELASTICO CENTRALE

Consideriamo un urto che avviene fra due sfere perfettamente rigide, lungo una sola direzione, le due sfere, rispettivamente di massa  $m_1$  e  $m_2$  e, prima dell'interazione, con velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

Dopo l'urto, nel quale si conserva sia la **quantità di moto totale** che l'**energia meccanica totale**, le masse restano inalterate e variano, invece le due velocità. Le due leggi di conservazione ci forniscono:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{w}_1 + m_2 \cdot \vec{w}_2 \quad \text{URTI, 6}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot w_2^2$$

dove abbiamo indicato con  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$  le velocità delle due sfere, dopo l'urto e dove, chiaramente, dato che il moto avviene lungo una sola direzione, abbiamo trascurato la notazione vettoriale.

Questo sistema di equazioni (URTI, 6) ci dà, risolvendolo, i seguenti valori per le velocità delle due sfere, dopo l'urto:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1 \cdot (m_1 + m_2) + 2 \cdot m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{URTI, 7}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2 \cdot (m_1 + m_2) + 2 \cdot m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

## ➤ URTO ANELASTICO CENTRALE

Si ha un **urto perfettamente anelastico** quando i due corpi, rispettivamente di massa  $m_1$  ed  $m_2$ , rimangono uniti dopo aver interagito. In questo tipo di urti, se il sistema è isolato, si conserva la **quantità di moto totale**, ma **non si conserva l'energia meccanica totale**.

Facciamo un esempio con dei dati numerici, così, certamente, tutto sarà più chiaro:

- *Un carrello avente la massa di 50kg procede alla velocità di 20m/s verso un carrello, fermo, di 100Kg. Dopo l'urto, i due carrelli procedono attaccati con una certa velocità, determinare questa velocità  $v$  e il quantitativo di energia meccanica "sprecata" nell'urto.*

\* \* \*

Il sistema è isolato e quindi si conserva la quantità di moto totale:

PRIMA DELL'URTO = DOPO L'URTO

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\vec{v} = \frac{50\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0\text{kg} \cdot 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(50\text{kg} + 100\text{kg})}$$

da cui:

$$\vec{v} \approx 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prima dell'urto l'energia cinetica totale è dovuta alla sola massa  $m_1$ , perché l'altra massa è ferma, essa vale:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} 50\text{kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 10000\text{J}$$

dopo l'urto, invece, l'energia cinetica è dovuta all'intero convoglio che procede alla velocità  $V$ , essa, dunque, vale:

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 150\text{kg} \cdot \left(6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 3337\text{J}$$

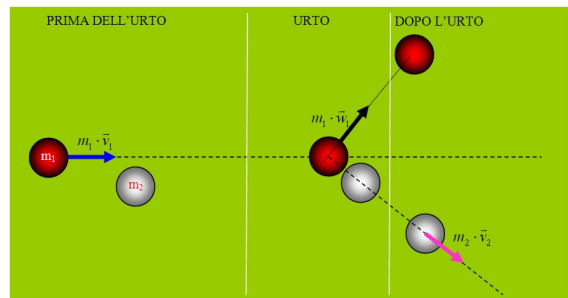
Sono andati persi, quindi circa **(10000J - 3337J) = (6663J)** di energia cinetica.

Dove sono andati a finire quei circa **6663J** di energia?

Diciamo subito che essi sono diventati calore, i due corpi, dopo l'urto, hanno una temperatura superiore rispetto a prima. Comunque non approfondiamo, per ora, l'argomento, lo faremo quando studieremo il fenomeni termici e la termodinamica.

## ➤ URTI NON CENTRALI

Quando l'**urto non è centrale**, cioè quando la velocità della sfera urtante non è allineata con il segmento che congiunge i centri delle due sfere, I due vettori **quantità di moto**, dopo l'interazione, non hanno la stessa direzione, ma formano un certo angolo. In particolare, se le masse delle due sfere sono uguali, allora tale angolo è proprio l'**angolo retto** (Sì, proprio così! Sempre un angolo retto!). Dimostriamo questo caso particolare!



Se l'urto è perfettamente **elastico**, valgono ancora le leggi di conservazione (URTI, 6), che abbiamo scritto in precedenza.

Questa volta sono più semplici, data l'uguaglianza delle masse. C'è la notazione vettoriale, in quanto vi sono cambi di direzione, ma si può semplificare parecchia roba, resta solamente:

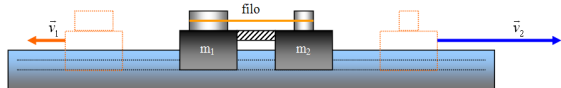
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \\ v_1^2 &= w_1^2 + w_2^2 \end{aligned} \quad \text{URTI, 8}$$

La prima relazione mostra che i moduli di questi vettori sono lati di un triangolo, mentre la seconda (teorema di Pitagora) mostra come questo triangolo sia rettangolo! Ecco dunque dimostrato che due sferette di uguale massa, che si urtano elasticamente, in modo non centrale, se ne partono, poi, con direzioni fra loro ortogonali.

Chi gioca a biliardo deve tener ben presente questo fatto, per controllare la traiettoria di entrambe le biglie.

## ESERCIZI RISOLTI URTI

Su una rotaia ad aria due corpi di massa:  $m_1=2\text{kg}$  e  $m_2=0,5\text{kg}$  comprimono vicendevolmente una molla e sono tenuti assieme da un filo, come mostra la figura.



Quando il filo viene tagliato, la molla scatta e i due corpi si allontanano nella stessa direzione, con verso opposto. Se il corpo di  $2\text{kg}$  viaggia, dopo lo scatto della molla, alla velocità di  $3\text{m/s}$ , quale sarà la velocità dell'altro?

\* \* \*

Il sistema formato dai due corpi è isolato, quindi si conserva la quantità di moto totale.

$$Q_{\text{prima dello scatto della molla}} = Q_{\text{dopo lo scatto della molla}}$$

$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Consideriamo positivo il verso (sinistra-destra), quindi:

$$m_2 \cdot \vec{v}_2 = -m_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 = \frac{-m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_2} = \frac{-2\text{kg} \cdot (-3 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{0,5\text{kg}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Osserviamo come la velocità del corpo sia inversamente proporzionale alla sua massa!

Una biglia con massa  $m_1=2\text{kg}$  che procede con velocità  $v_1=4\text{m/s}$  urta elasticamente una seconda biglia con  $m_2=0,5\text{kg}$  inizialmente ferma, che parte, dopo l'urto, con velocità  $w_2$  nella stessa direzione e verso della prima.

Calcoliamo i moduli di  $w_2$  e di  $w_1$ .

\* \* \*

Applichiamo le URTI, 7, tenendo conto che:  $v_1=4\text{m/s}$ ; e  $v_2=0\text{m/s}$ :

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{v}_1 \cdot (m_1 - m_2) + 2m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,5\text{kg}}{2,5\text{kg}} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{v}_2 \cdot (m_2 - m_1) + 2m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{4\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,5\text{kg}} = 6,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Possiamo notare come, essendo l'urto elastico, si conservi sia la quantità di moto che l'energia! Provare per credere.

## Quantità di moto:

prima dell'urto:

c'è solo quella del corpo 1:

$$Q = m_1 v_1 = 2\text{kg} \cdot 4\text{m/s} = 8\text{kg m/s}$$

dopo l'urto:

c'è:

$$Q = m_1 w_1 + m_2 w_2 = 2\text{kg} \cdot 2,4\text{m/s} + 0,5\text{kg} \cdot 6,4\text{m/s} = 8\text{kg m/s}$$

## Energia cinetica:

prima dell'urto:

c'è solo quella del corpo 1:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot 16\text{m}^2/\text{s}^2 = 16\text{J}$$

dopo l'urto:

c'è:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = 1\text{kg} \cdot 5,76\text{m}^2/\text{s}^2 + 0,25\text{kg} \cdot 40,96\text{m}^2/\text{s}^2 = 5,76\text{J} + 10,24\text{J} = 16\text{J}$$

Un carrello avente la massa di  $50\text{kg}$  procede alla velocità di  $20\text{m/s}$  verso un carrello, fermo, di  $100\text{kg}$ .

Dopo l'urto, i due carrelli procedono attaccati con una certa velocità, determinare questa velocità  $v$  e il quantitativo di energia meccanica "sprecata" nell'urto anelastico.

\* \* \*

Il sistema è isolato e quindi si conserva la quantità di moto totale:

PRIMA DELL'URTO = DOPO L'URTO

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\vec{v} = \frac{50\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0\text{kg} \cdot 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(50\text{kg} + 100\text{kg})}$$

da cui:

$$\vec{v} \approx 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prima dell'urto l'energia cinetica totale è dovuta alla sola massa  $m_1$ , perché l'altra massa è ferma, essa vale:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\text{kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 10000\text{J}$$

dopo l'urto, invece, l'energia cinetica è dovuta all'intero convoglio che procede alla velocità  $\vec{v}$ , essa, dunque, vale:

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 150\text{kg} \cdot \left(6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 3337\text{J}$$

Sono andati persi, quindi circa:

$$(10000\text{J} - 3337\text{J}) = (6663\text{J}) \text{ di energia cinetica.}$$